コーポレートファイナンス
レポート課題（1）に対するコメント

2006 年 1 月 232 日
中川　秀敏 (NAKAGAWA Hidetoshi)
西 9 号館W棟 105 号室
E-mail:nakagawa@mot.titech.ac.jp
URL:http://www.craft.titech.ac.jp/~nakagawa/index.html

問題

以下は企業年金連合会のホームページの資産運用に関するページ（http://www.pfa.or.jp/top/jigyou/pfaport.html）に掲載されている基本ポートフォリオと、各資産に対する予想基礎数値の表である。

期待収益率	標準偏差（リスク）	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式
5.07%	9.79%	37%	33%	7%	23%

表 1: 平成 14 年 (2002 年）9 月 1 日実施

	期待収益率	標準偏差（リスク）	相関係数			
			国内債券	国内株式	外国債券	外国株式
国内債券	2.00%	5.00%	1.000			
国内株式	7.00%	24.00%	0.201	1.000		
外国債券	2.50%	13.00%	−0.069	−0.335	1.000	
外国株式	8.00%	19.50%	−0.086	0.059	0.630	1.000

表 2: 1970 年〜2001 年までの 32 年間の市場インデックスを用いて推計された予想基礎数値

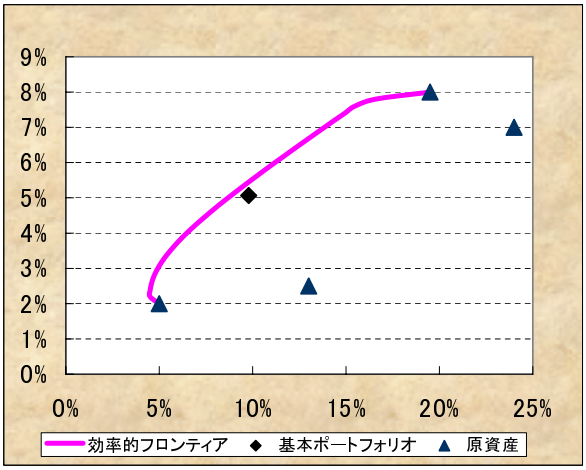
また、リスク・フリーレート（名目短期金利）は 1.5% に設定されているとする。

（1）基本ポートフォリオが効率的フロンティア上にあるどうかを確認せよ

今回はポートフォリオの期待リターンの目標値をまず与え、その期待リターンを達成するもののなかでリスク（リターンの標準偏差）が最小になる投資比率を求めるという方法で、効率的フロンティアを求めた。

- 期待リターンの目標値は、国内債券の期待リターン 2% ～外国株式の期待リターン 8% の間を 0.2% 刻みで与えた。
- 投資比率に非負制約を加えた。
- Microsoft Excel のソルバー機能の最小化を用いて逐次最適化を実施した。

効率的フロンティアと基本ポートフォリオを $\sigma - \mu$ 平面上に表した結果は以下の図 1 のようになる。



リスク（σ）	期待リターン（μ）	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式
5.0%	2.0%	100.0%	0.0%	0.0%	0.0%
4.5%	2.2%	82.0%	2.4%	15.6%	0.0%
4.5%	2.4%	80.0%	3.5%	13.9%	2.6%
4.6%	2.6%	78.6%	4.1%	11.7%	5.6%
4.7%	2.8%	77.2%	4.8%	9.5%	8.5%
4.9%	3.0%	75.7%	5.5%	7.3%	11.5%
5.2%	3.2%	74.3%	6.1%	5.1%	14.5%
5.4%	3.4%	72.9%	6.8%	2.9%	17.4%
5.7%	3.6%	71.5%	7.5%	0.7%	20.4%
6.1%	3.8%	68.6%	8.6%	0.0%	22.8%
6.5%	4.0%	65.0%	9.9%	0.0%	25.0%
6.9%	4.2%	61.5%	11.3%	0.0%	27.3%
7.3%	4.4%	57.9%	12.6%	0.0%	29.5%
7.7%	4.6%	54.3%	14.0%	0.0%	31.7%
8.2%	4.8%	50.8%	15.3%	0.0%	33.9%
8.7%	5.0%	47.2%	16.6%	0.0%	36.1%
9.2%	5.2%	43.7%	18.0%	0.0%	38.4%
9.7%	5.4%	40.1%	19.3%	0.0%	40.6%
10.2%	5.6%	36.6%	20.6%	0.0%	42.8%
10.7%	5.8%	33.0%	22.0%	0.0%	45.0%
11.2%	6.0%	29.4%	23.3%	0.0%	47.2%
11.7%	6.2%	25.9%	24.7%	0.0%	49.5%
12.2%	6.4%	22.3%	26.0%	0.0%	51.7%
12.8%	6.6%	18.8%	27.3%	0.0%	53.9%
13.3%	6.8%	15.2%	28.7%	0.0%	56.1%
13.8%	7.0%	11.7%	30.0%	0.0%	58.3%
14.4%	7.2%	8.1%	31.3%	0.0%	60.5%
14.9%	7.4%	4.6%	32.7%	0.0%	62.8%
15.5%	7.6%	1.0%	34.0%	0.0%	65.0%
16.6%	7.8%	0.0%	20.0%	0.0%	80.0%
19.5%	8.0%	0.0%	0.0%	0.0%	100.0%

図 1: 左：効率的フロンティア（本来は分散最小となるポートフォリオの期待値よりも上側の部分だけ）、企業年金連合会の基本ポートフォリオおよび４つの原資産／右：効率的フロンティアに対応する投資比率の表

結果を見る限りでは、基本ポートフォリオは厳密には効率的フロンティア上にはない。実際に、目標期待リターンを 5.07% に設定したときのリスク最小ポートフォリオは次のようになる。したがって、数値計算

期待収益率	標準偏差（リスク）	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式
5.07%	8.85%	46%	17%	0%	37%

における計算誤差の範囲を考慮したとしても基本ポートフォリオは効率的フロンティア上にはない。

しかしながら、一連の結果を見ると、期待リターンが６%以上のポートフォリオを組もうとすると外国債券が全く組み入れられなくなることが確認される。個別資産の期待リターンとリスクを見ても、外国債券

が他と比べてもリスクの点で非常に非効率な資産であることがわかる。一方で、実際のポートフォリオを決定する際には、対象資産を全く組み入れない決定をすることもないと考えられる。したがって、実際には単なる非負制約ではない上下限制約を投資比率に課してポートフォリオの決定を行っている可能性が高い。その点では、より強い制約条件下では基本ポートフォリオは効率的なポートフォリオになっていることが推測される。

注

投資比率に非負制約をつけない（各資産への投資比率が 0%〜100% の範囲外の場合も許す）ときには、実は数学的に効率的フロンティアが満たす曲線式を得ることができることが知られている。

- $\mathbf{w}^\top = (w_1, \cdots, w_N) \quad (\sum_{i=1}^{N} w_i = 1)$：各資産への投資比率（非負制約はつけない）
- $\mathbf{m}^\top = (\mu_1, \cdots, \mu_N)$ ：各資産の期待リターンのベクトル
- $\mathbf{C}$：リターンの分散共分散行列
- $\mathbf{1}^\top = (1, \cdots, 1)$ ：成分が全て 1 の N-次元ベクトル

ここで $^\top$ の記号は転置を表す。つまりベクトルは縦ベクトルとして考える。

このとき、期待リターンが μ_V とするようなポートフォリオのうち分散最小のものの投資比率ベクトル $\hat{\mathbf{w}}(\mu_V)$ は、次で与えられる

$$\hat{\mathbf{w}}(\mu_V) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{1}^\top\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} \\ \mu_V & \mathbf{m}^\top\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} \end{vmatrix} \mathbf{C}^{-1}\mathbf{1} + \begin{vmatrix} \mathbf{1}^\top\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{m}^\top\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1} & \mu_V \end{vmatrix} \mathbf{C}^{-1}\mathbf{m}}{\begin{vmatrix} \mathbf{1}^\top\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1} & \mathbf{m}^\top\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1} \\ \mathbf{1}^\top\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} & \mathbf{m}^\top\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} \end{vmatrix}}$$

ただし、分母が 0 ではないとする。（$|\mathbf{A}|$ は行列 $\mathbf{A}$ の行列式を表す。

このとき、$(\sqrt{\hat{\mathbf{w}}(\mu_V)^\top\mathbf{C}\hat{\mathbf{w}}(\mu_V)}, \mu_V)$ という点を結んだ曲線（最小分散ポートフォリオよりも上側）が非負制約無しの場合の効率的フロンティアとなる。一般に $\sigma - \mu$ 平面上では、カーブは双曲線の一部になる。下図から分かるように、高期待リターンの部分で非負制約がない場合の方がよりリスクの小さいポートフォリオを実現できる。それらは、国内株式との負の相関が比較的高い外国債券の空売りポジションを持つことで実現できるものになっている。

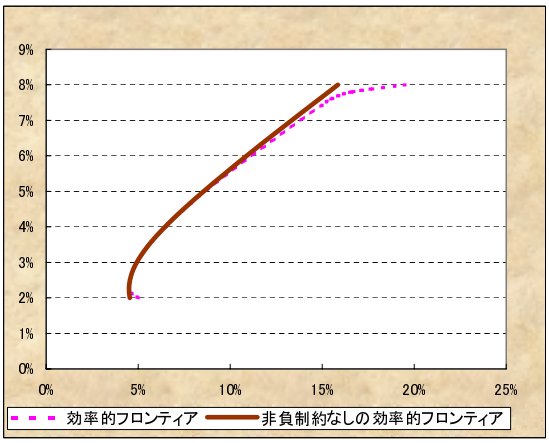


図 2: 非負制約ありの効率的フロンティア（破線）と非負制約無しの効率的フロンティア（太実線）

（2）安全資産（リスク・フリーレートでの運用）も含めて、最適なポートフォリオの提案

資本市場線（安全資産とリスク資産を組み合わせた際の効率的フロンティアに相当）を描くためには、安全利子率の点から（1）で描いた効率的フロンティアへの接線を引くことになる（接点を市場ポートフォリオと解釈することの議論はここでは行わない)。接線の傾きを求めることはちょうど（1）の設定において、$\frac{\mu_V - r}{\sigma_V}$ すなわち Sharpe's ratio の最大化を行うことと同じ。ここでも Excel のソルバー機能を用いた結果、以下のポートフォリオが接点ポートフォリオとして得られた。これをもとに描かれた資本市場線は下図

期待収益率	標準偏差（リスク）	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式
5.30%	9.41%	42%	19%	0%	39%

表 3: Sharpe's ratio 最大化で得られた接点ポートフォリオ

の通り。

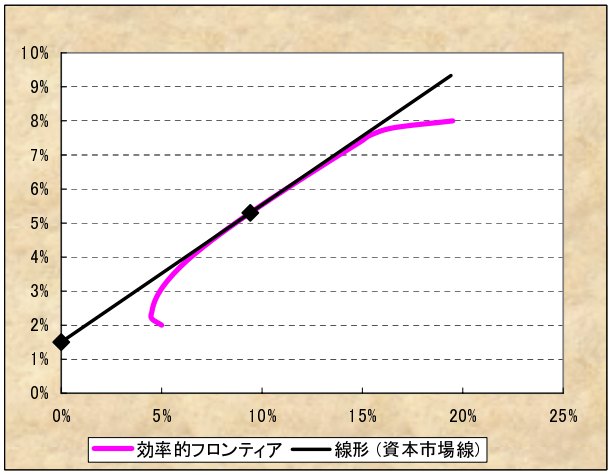


図 3: 安全資産含めた効率的フロンティア（資本市場線）

（2ファンド）分離定理により、リスク資産だけに注目すれば上記の接点ポートフォリオを保有するのが最適となる。後はリスク許容度に応じて、全体での安全資産とリスク資産の保有比率が決まれば、資本市場線上の1点が決まる。その点は、最適なリスクーリターンの組合せを実現するポートフォリオを表すことになる。

最終的なポートフォリオの選び方として、講義では何らかの効用関数を考え、そこから描くことができる無差別曲線と資本市場線との接点を選択するという考え方を紹介した。もちろん適当な効用関数は何かという判断は難しいし、また無差別曲線の形で吟味するのも大変なので、効用関数以外のアプローチでポートフォリオを選択したとしても、その考え方に無理が無く十分説明されていれば評価する。