イノベーションマネジメント研究科
技術経営専攻

コーポレートファイナンス

第7講：CAPM

東京工業大学イノベーションマネジメント研究科
中川　秀敏
E-mail: nakagawa@mot.titech.ac.jp
Office Hour : 13:00-14:30, every Tuesday, at W9-105

※講義資料は、講義前日の午後5時までにはアップするので事前に
http://www.craft.titech.ac.jp/~nakagawa/dir2/lecture.html#TIT2005_2
から各自でダウンロードして用意すること。

今回の内容

- CAPM (資本資産評価モデル)
  - β (ベータ) の推定
  - リスクの分解
  - 証券市場線
  - CAPM の応用

CAPM

- CAPM(Capital Asset Pricing Model)の前提
  - 全ての投資家はリスク回避的で、ポートフォリオの1期間後の価値を最大化する投資を選択する
  - 全ての投資家は市場に関する情報を平等に得ることができ、全資産に対し期待リターン、リスク、相関について同じ予想を持つ
  - 市場は完全競争市場（全員がprice taker、取引コストなし、空売り制約なし）
  - 無リスク金利での資金の貸借が可能

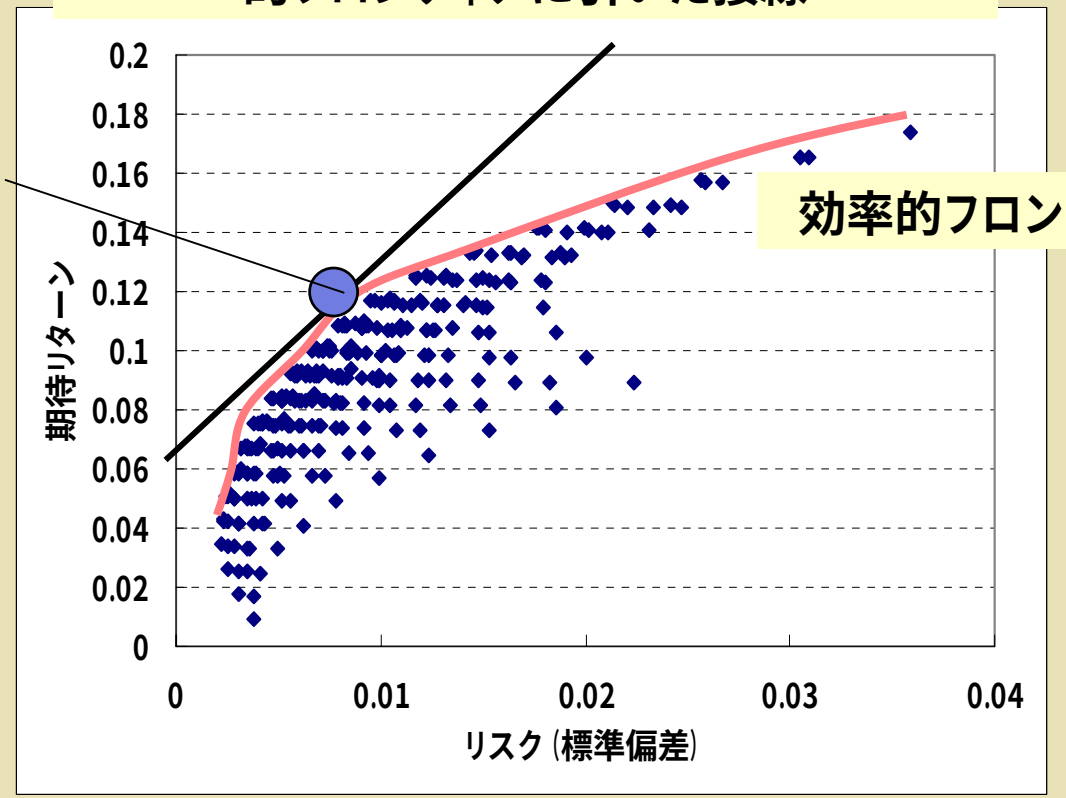
- 結果的に、全ての投資家は同じ効率的フロンティアをもつ
  - 最適ポートフォリオは投資家の効用関数に依存するので、違ってくる

CAPM

資本市場線：無リスク金利を表す点から効率的フロンティアに引いた接線

(σ_M, μ_M)

効率的フロンティアと資本市場線の接点が**市場ポートフォリオ**（ウェイトは各資産の時価総額の割合に等しくなっているのが名前の由来）



CAPM

- CAPMにおける重要な関係式

r_i: ある危険資産（株式）iのリターン

r_M: 市場ポートフォリオのリターン

σ_M : 市場ポートフォリオのリスク

r_f : 無リスク金利（安全資産のリターン）

$$E[r_i] - r_f = \beta_i (E[r_M] - r_f)$$

ただし、$\beta_i = \dfrac{Cov[r_i, r_M]}{\sigma_M^2}$

※厳密にはTOPIXと市場ポートフォリオは異なるが、TOPIX を市場ポートフォリオと見なしてCAPMを適用することが多い。

CAPM

- CAPMの導出の大ざっぱな議論
  - ある資産のリターンを市場ポートフォリオのリターンで単回帰する関係式を考える

$r_i = \alpha + \beta r_M + \varepsilon_i$ （ε_iは残差を表す確率変数で、r_Mとは独立）

  - 残差の分散を最小化することで最もデータにフィットする回帰直線が得られるという条件から

$$E\left[\varepsilon^2\right] = E\left[r_i^2\right] - 2\beta E\left[r_i r_M\right] + \beta^2 E\left[r_M^2\right] + \alpha^2 - 2\alpha E\left[r_i\right] + 2\alpha\beta E\left[r_M\right]$$

$$\frac{\partial E\left[\varepsilon^2\right]}{\partial \alpha} = 2\alpha - 2E\left[r_i\right] + 2\beta E\left[r_M\right] = 0 \Leftrightarrow E\left[r_i\right] = \alpha + \beta E\left[r_M\right]$$

$$\frac{\partial E\left[\varepsilon^2\right]}{\partial \beta} = -2E\left[r_i r_M\right] + 2\beta E\left[r_M^2\right] + 2\alpha E\left[r_M\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow E\left[r_i r_M\right] = \alpha E\left[r_M\right] + \beta E\left[r_M^2\right]$$

CAPM

- CAPMの導出の大ざっぱな議論(続き)
  - 先のα, βの連立方程式を解くと、以下のように回帰係数と切片が求まる

$$\beta_i = \frac{E[r_i r_M] - E[r_i]E[r_M]}{E[r_M^2] - (E[r_M])^2} = \frac{Cov[r_i, r_M]}{V[r_M]}, \quad \alpha_i = E[r_i] - \beta_i E[r_M]$$

  - 次に上で得られたβを用いて、ある定数c を用いて、以下のような関係式が成り立つかどうかを考える

$$E[r_i] - c = \beta_i (E[r_M] - c)$$

  - ある資産として安全資産を選び、先の回帰式を適用すると

$$r_f - c = \beta_f (E[r_M] - c) = 0 \quad (\because \beta_f \equiv 0)$$

$$\therefore c = r_f$$

リスクの分解

- CAPM の式をリスクという観点から見直すと、個別資産のリスクは次のように分解してとらえることができる

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

ただし、$\sigma_i^2 = V[r_i],\ \sigma_M^2 = V[r_M],\ \sigma_\varepsilon^2 = V[\varepsilon_i]$

$\beta_i^2 \sigma_M^2$: システマティック・リスク

$\rightarrow$ ポートフォリオでも残る

σ_ε^2 : アンシステマティック・リスク

$\rightarrow$ ポートフォリオに組入る資産数を増やすと0に近づく

リスクの分解

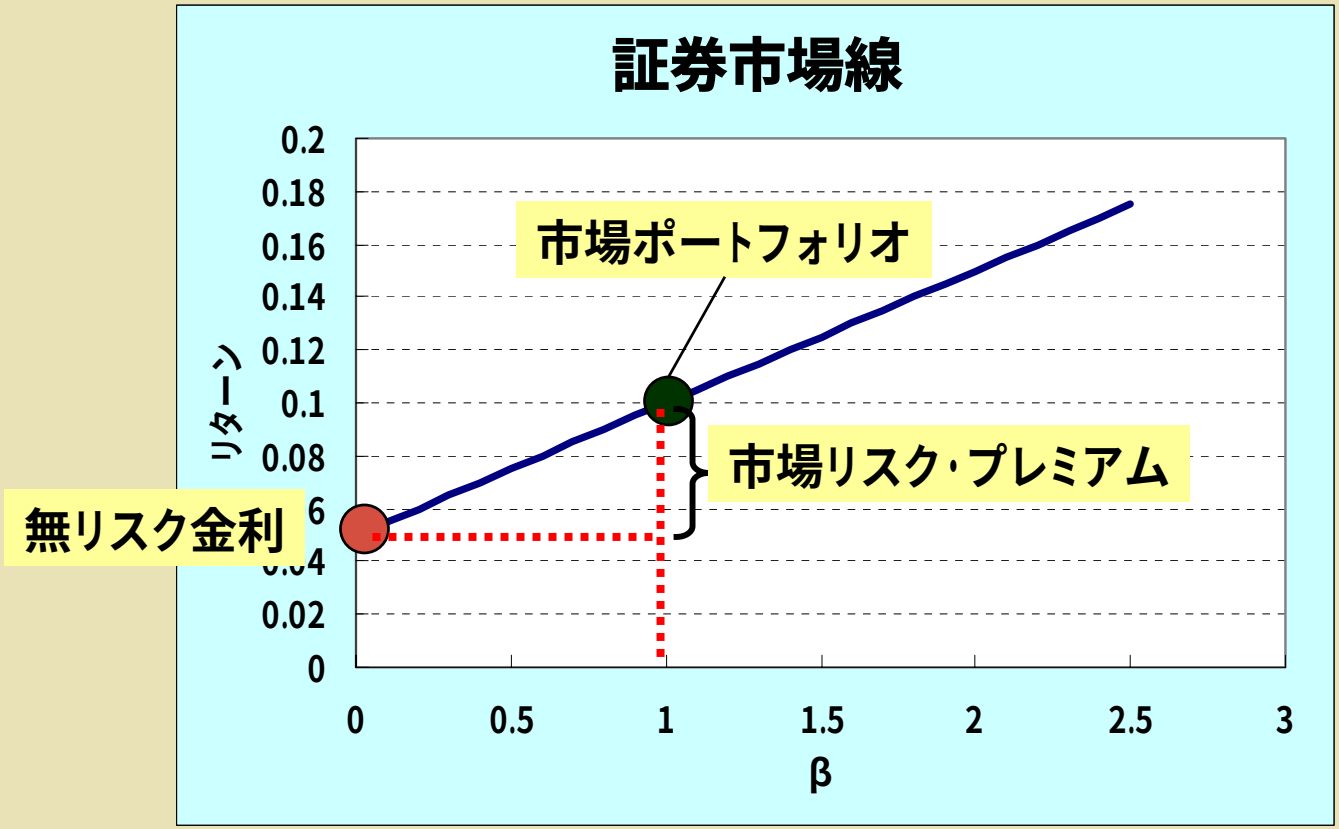
- 多数の資産を考えることで、リスク分散の効果が暗に働いているとすれば、個別のリスクも以下のような単純な関係にあると考えることができる

$$\sigma_i = \beta_i \sigma_M$$

- このことは、市場で各資産に対する価格は、システマティック・リスクを与えるβに対してつけられており、各資産に特有なアンシステマティック・リスクに対しては価格がつかないと見なすことを意味している。

証券市場線

- **証券市場線** (Security Market Line)
  - β (システマティック・リスク) と期待リターンの関係を平面上に表した直線



証券市場線

- **証券市場線** (Security Market Line)
  - CAPM理論の重要な帰結の一つが「市場は無裁定」であるということ
  - それは「全ての (市場で取引可能な) 資産について、βと期待リターンの関係が証券市場線の上に存在する」ということと同じ
  - もし、証券市場線よりもβと期待リターンの組合せの点が上に来る資産 (資産Zと呼ぶ) があれば、それは (アンシステマティック・リスクが分散されているという前提で) 裁定機会の存在を意味する
    - 資産Zを購入する
    - 資産Zと同じβの値になるようなポートフォリオを他の資産を用いて構成して (これは原理的には可能) 売却する
    - βのリスクは二つの取引で相殺され、期待リターンの差は正となる

CAPMの応用

- **株主資本コストの算出**
  - 株主が期待するハードルレートとしての資本コストを、市場での評価と比較するということで、CAPMから導出される期待リターンとして求める
  - 負債・資本構成が大きく変化するような局面では、アンレバード株主資本コストを求めてから、新しい負債比率に対するβを用いて期待リターンを考えることがよいとされる。
- **投資パフォーマンスの評価尺度**
  - トレーナーの尺度：システマティック・リスクに対する超過収益の大きさを見る

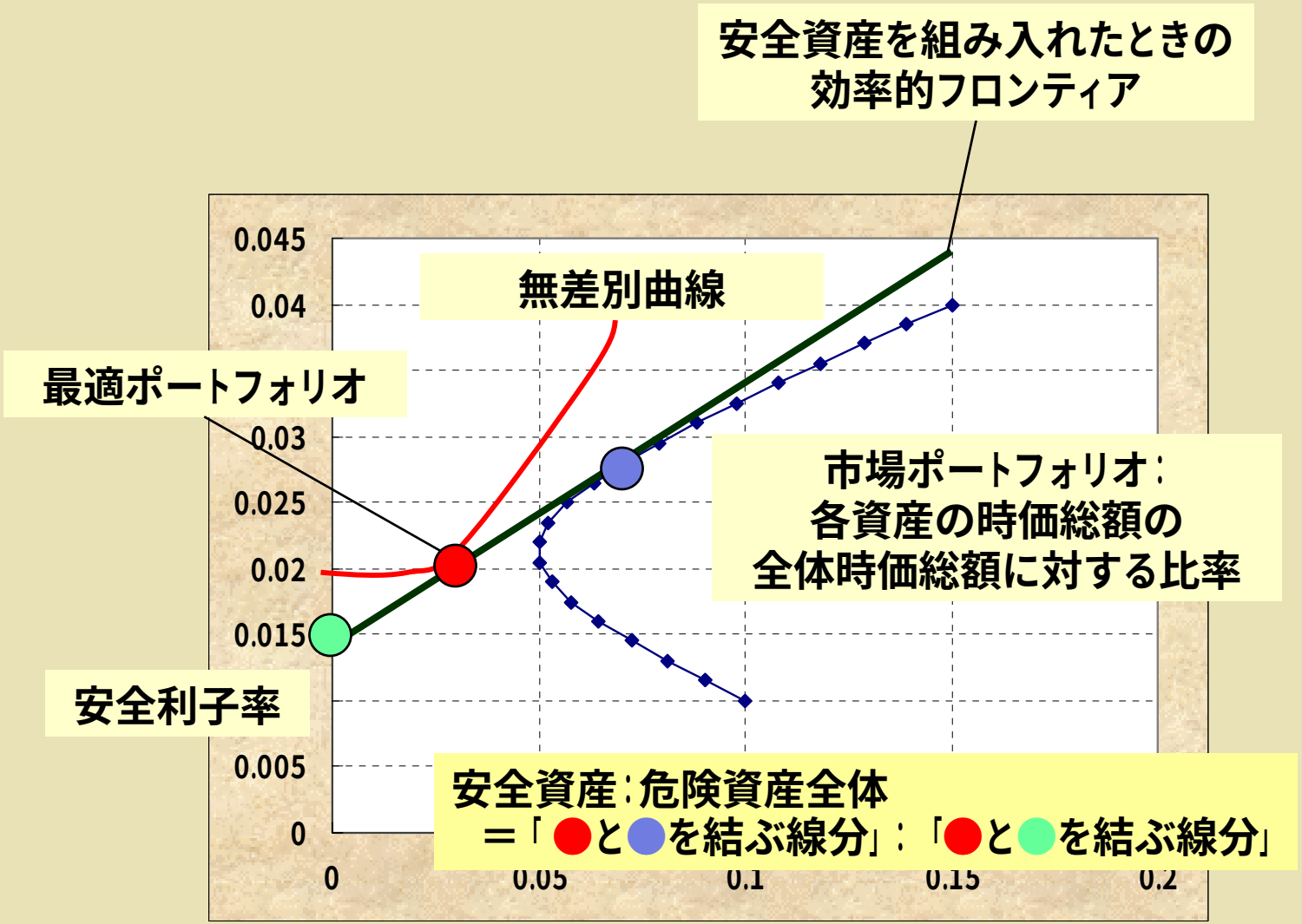
$$\frac{r_i - r_f}{\beta_i}$$

  - シャープ・レシオ：リスク全体に対する超過収益の大きさを見る

$$\frac{r_i - r_f}{\sigma_i}$$

前回分：(トービンの) 分離定理

- (1つの) 安全資産と複数の危険資産からなる最適ポートフォリオを求めるときに
  - 各危険資産への最適配分比率
  - 安全資産と危険資産全体への最適配分比率

  は独立に考えることが出来るという定理
  (2ファンド分離定理など他の言い方もある)
- 実際に
  - 各危険資産への最適配分比率は、安全利子率を表す点から危険資産のみから得られる効率的フロンティアへ引いた接線の接点で示される
    (これを「市場ポートフォリオ」と呼ぶ)
  - 安全資産と危険資産全体への最適配分比率は、上記の接線と無差別曲線の接点によって決まる

前回分：（トービンの）分離定理