イノベーションマネジメント研究科
技術経営専攻

コーポレートファイナンス

第6講：ポートフォリオ理論

東京工業大学イノベーションマネジメント研究科
中川　秀敏
E-mail: nakagawa@mot.titech.ac.jp
Office Hour : 13:00-14:30, every Tuesday, at W9-105

※講義資料は、講義前日の午後5時までにはアップするので事前に
http://www.craft.titech.ac.jp/~nakagawa/dir2/lecture.html#TIT2005_2
から各自でダウンロードして用意すること。

今回の内容

- 危険資産のリターンとリスク
- 効用関数
  - リスクに対する態度
- 平均-分散アプローチ
  - 2資産ポートフォリオと相関係数
  - 効率的フロンティア
  - 分離定理

年金基金のポートフォリオ運用

- 年金資金運用基金の場合
  - 各運用資産のベンチマーク
    - 国内債券：NOMURA-BPI総合
    - 国内株式：TOPIX(配当込み)
    - 外国債券：シティグループ世界国債インデックス(日本除く。円換算、為替ヘッジ無し)
    - 外国株式：MSCI・KOKUSAI (円換算、配当込み)
    - 短期資産：TB現先1ヶ月
  - 基本ポートフォリオ(平成17年度から)

目標収益率	標準偏差	予定利率
3.37%	5.55%	3.20%

国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	短期資産
67%	11%	8%	9%	5%

  - 移行ポートフォリオ(平成17年度市場運用分)

国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	短期資産
47%～57%	16%～21%	7%～12%	10%～15%	0%

年金基金のポートフォリオ運用

- 各ポートフォリオをどのように決めているか
  - ポートフォリオ・・・ここでは、各資産への投資比率の一覧のこと
  - 基本的なアイデア
    - 各資産の期待リターンと期待リターンの標準偏差(リスク) を算出
    - 資産間の相関係数を算出
    - それらをもとに、全体としての期待リターンを大きく、かつ全体の標準偏差(リスク) を小さくするようなポートフォリオを求める
    - 実際には期待リターンやリスクの推定が難しく、実用上の課題も多い。また、様々な定性的な判断によって、定量的な最適解が最終的には選択されるとは限らない。

資産の分類

- ファイナンスでは、不確実性の有無によって2種類の資産を分けて考える
  - 安全資産 (riskless asset)
    - 将来の価値について不確実性のない資産
    - 安全な預金や債券として考えることが多い。(危険資産の相対価格を論じるときは価値基準としての貨幣を考える？)
    - 基本的に1種類しかなく、リターンは「無リスク金利 (or 安全利子率) で表される
  - 危険資産 (risky asset) →訳語がイマイチな気がするが・・・
    - 将来の価値について不確実性がある資産
    - 株式が代表的だが、現実の対象は非常に広範囲
    - 将来のリターンがある確率分布に従うと仮定して、期待リターンやリスクの議論を行う
    - 「裁定 (arbitrage)」が起こらないようなモデル化が必要

リターン

- リターン (収益率)
  - 当初の投資金額に対して、投資によってどれだけ超過利益を得たかを表す指標

$$\text{リターン} = \frac{\text{評価時点における投資価値} - \text{当初の投資金額}}{\text{当初の投資金額}}$$

  - 「評価時点における投資価値」とは、<u>評価時点での投資対象の資産価値と、その時点までに得た配当金や利子などの合計</u>を意味する
- 期待リターン(期待収益率)
  - これをただの「リターン」と呼ぶことも多いので注意
  - 将来のリターンは「確率変数」としてとらえることになるが、その期待値(平均) となる数値のことを期待リターンと呼ぶ
  - 期待リターンをどのように与えるかという問題は、実務的には極めて難しい問題 (単に過去平均と考えて良いのか？)

リスク

① 「将来どのくらい損を被るか」という「想定すべき損害の程度」という観点
- 例えば、1年後に資産価値が**どのくらい目減りする可能性**があるか？

② 「将来資産価値がおよそどのくらいの値の範囲に収まるか」という「不確実性の度合い」という観点
- 例えば、1年後の資産価値が、**およそ何円～何円の範囲**に収まるか？

③ 対象に影響を与える要素が現段階で1単位変動したときに、その対象の価値がどれだけ変化するか
- 例えば、金利や円ドルレートが**1単位変化**するとき、米国債の円換算価値は**どの程度変化**するか？

「リスク」の評価指標

① ダウンサイド・リスク：収益率分布の下方（損失側）部分に焦点をあて、どの程度の損失を想定しておくかを示す値。Value at Risk が典型例。

② ボラティリティ（リターンの分布の標準偏差）が代表的。絶対偏差などで表現することも。

③ リスク感応度：規準となる経済指標や市場指標（金利、為替レート、株価指数など）が1単位変化したときのポートフォリオ価値の変化量

（参照）山下智志「市場リスクの計量化とVaR」朝倉書店

コーポレートファイナンスの講義での「リスク」と言えば②の意味で用いる

効用関数

- 効用関数
  - ここでは「金額」に対する満足度を測るものとして効用関数を考える
  - 効用関数に対しては「単調増加性」の条件を課す（要するに金額が大きいほど満足度は高くなるということ）
  - ただし、経済学的に「効用関数」をきちんと論じるのは非常に大変→ミクロ経済学の教科書を参照

$u(x)$：効用関数

X：確率変数（例えば資産価格）

$\Rightarrow E[u(X)]$：期待効用

効用関数

- **期待効用仮説**
  - 資産価値が確率変数XとYで表される2つの資産のどちらを選択するか→ $E[X]$ と $E[Y]$ を比べる？
  - 効用関数 $u(x)$ に対して、両者の期待効用 $E[u(X)]$ と$E[u(Y)]$ を比較して大きい方を選択するという見方が「期待効用仮説」の骨子
  - <u>効用関数が2次関数</u> or <u>X が正規分布に従う</u>とき、期待効用関数は効用関数の2階の導関数と確率変数の期待値・分散で特徴づけられる

$u(X)$を$E[X]$の周りでテーラー展開：

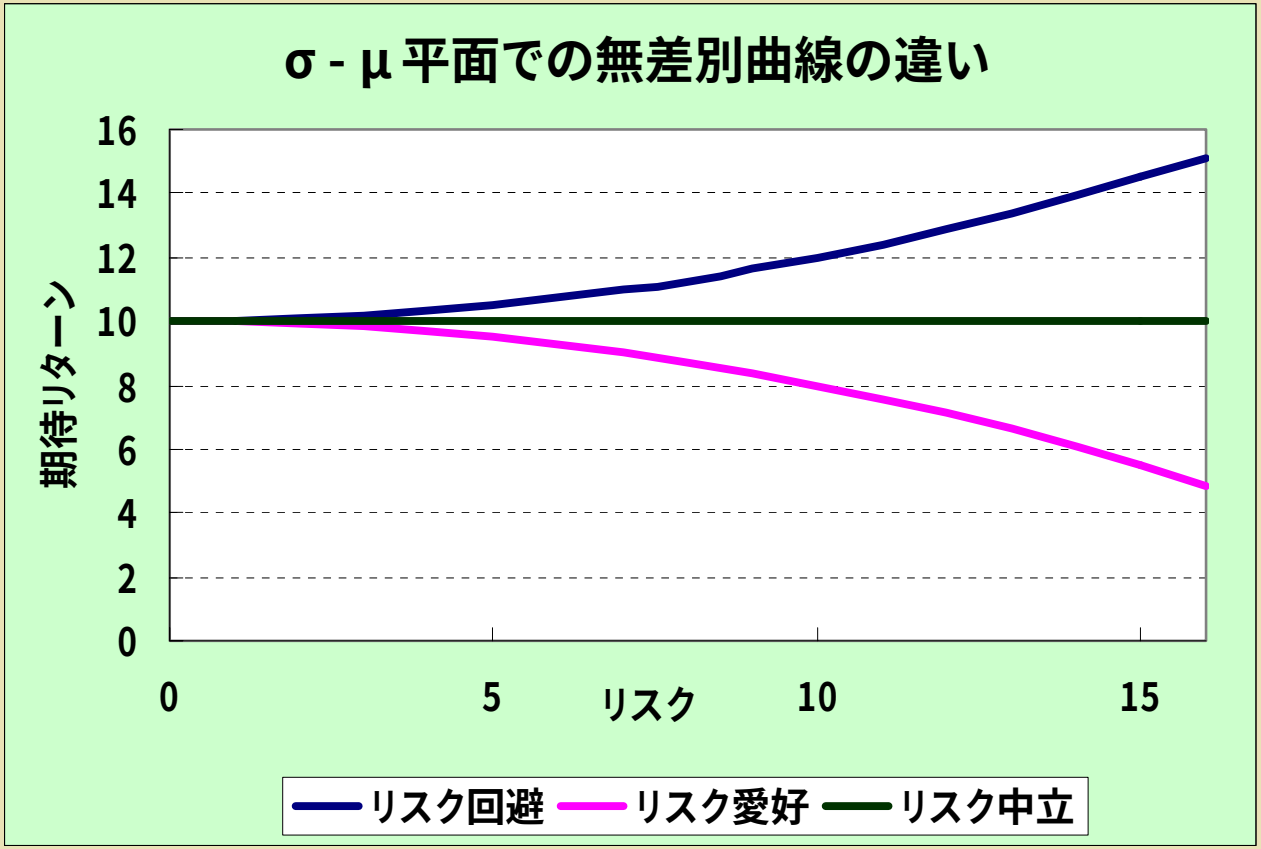
$$u(X) = u(E[X]) + u'(E[X])(X - E[X]) + u''(E[X])(X - E[X])^2 + \cdots$$

$$E[u(X)] = u(E[X]) + u''(E[X])V[X] + \cdots$$

効用関数

- リスクに対する態度
  - 危険回避：期待値が同じであれば、不確実なものより確実なものを好む（通常は「危険回避」な投資家を想定する）
    - 効用関数が下に凹（上に凸）な形状
  - 危険愛好：期待値が同じであれば、確実なものより不確実なものを好む
    - 効用関数が下に凸な形状
  - 危険中立（リスク・ニュートラル）：期待値が同じであれば、確実であろうが不確実であろうが無差別（デリバティブの価格付けは「危険中立」な世界で考える）
    - 効用関数が1次関数

効用関数


σ - μ 平面での無差別曲線の違い
期待リターン
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
5
10
15
リスク
リスク回避
リスク愛好
リスク中立

2資産ポートフォリオ

- 2つの資産リターンが正規分布に従うと仮定して、ポートフォリオのリスクを計算する。

X, Y : 各資産のリターン (確率変数)

$\mu_X := E[X],\ \mu_Y := E[Y]$: 各資産の期待リターン

$\sigma_X := \sqrt{V[X]},\ \sigma_Y := \sqrt{V[Y]}$: 各資産のリスク

ρ_{XY} : リターンの相関係数

w : 第1資産の保有比率 (もう一方は$1-w$)

ポートフォリオの期待リターン :

$$w\mu_X + (1-w)\mu_Y$$

ポートフォリオのリターンの分散 :

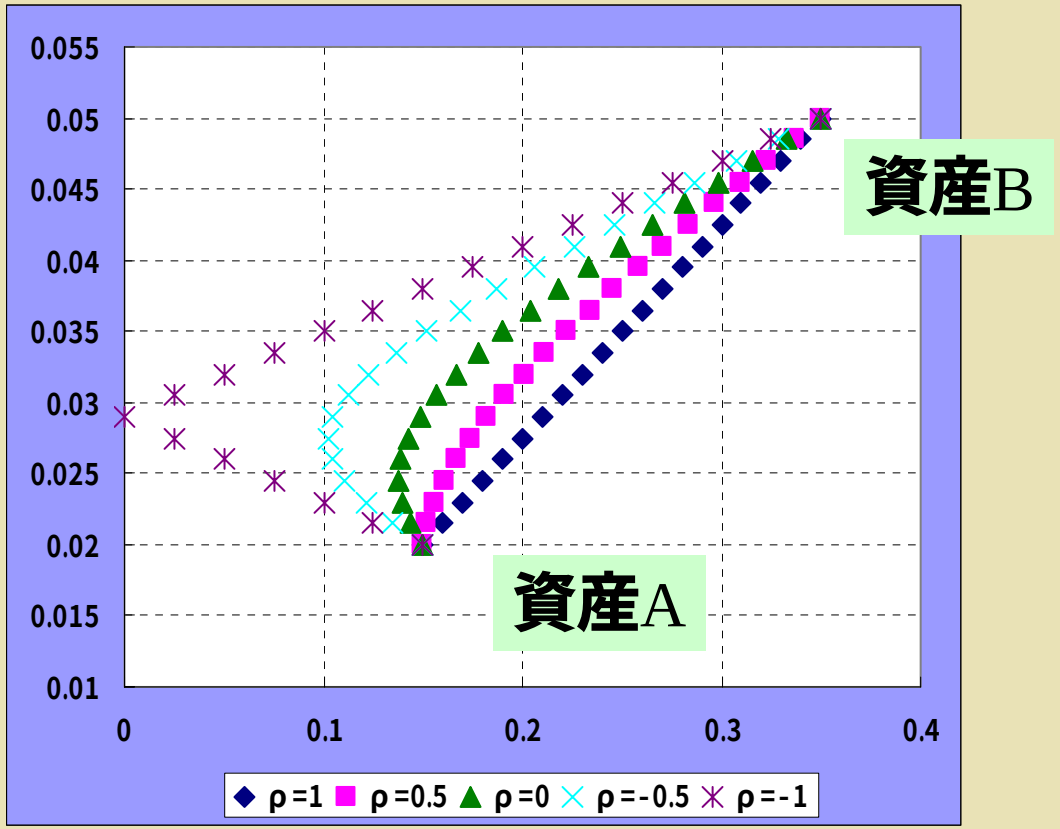
$$w^2\sigma_X^2 + (1-w)^2\sigma_Y^2 + 2w(1-w)\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY}$$

2資産ポートフォリオ

2資産の場合

	期待リターン	リスク
資産A	2%	15%
資産B	5%	35%

$(w^2\sigma_A^2+(1-w)^2\sigma_A^2+2w(1-w)\sigma_A\sigma_B\rho, w\mu_A+(1-w)\mu_B)$のプロット図



ρ：2資産のリターンの相関係数

※ρ＝－1のとき、リスク（ボラティリティ）＝0となるポートフォリオを組むことができる。
この例では (0.7, 0.3)

一般の場合

- 各資産リターンが正規分布に従うと仮定して、ポートフォリオ収益率の分散を計算する。

$X_1, X_2, \cdots, X_N$: 各資産のリターン (確率変数)

$w_1, w_2, \cdots, w_N$: 各資産の保有比率

$(w_1 + w_2 + \cdots + w_N = 1)$

$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N$: 各資産の期待リターン

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,N} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N,1} & \cdots & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$$

: 分散共分散行列

一般の場合

ポートフォリオ全体のリターン

$Y := w_1 X_1 + w_2 X_2 + \cdots + w_N X_N$: ポートフォリオ全体のリターン

$\mu_P := w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2 + \cdots + w_N \mu_N$: ポートフォリオ全体の期待リターン

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &:= (w_1 \ \cdots \ w_N)\Sigma \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le N} w_i w_j \sigma_{i,j} \end{aligned}$$

: ポートフォリオ全体のリターンの分散

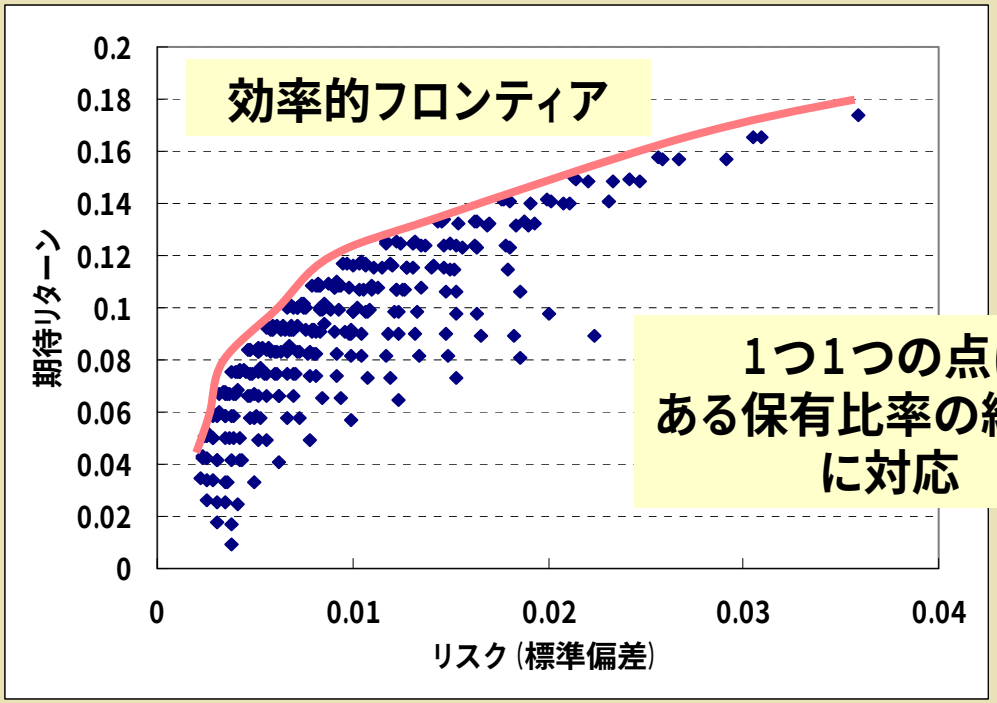
ポートフォリオのリターンYは、平均μ_P、分散σ_pの正規分布に従う

※あとは1資産の場合の計算に帰着

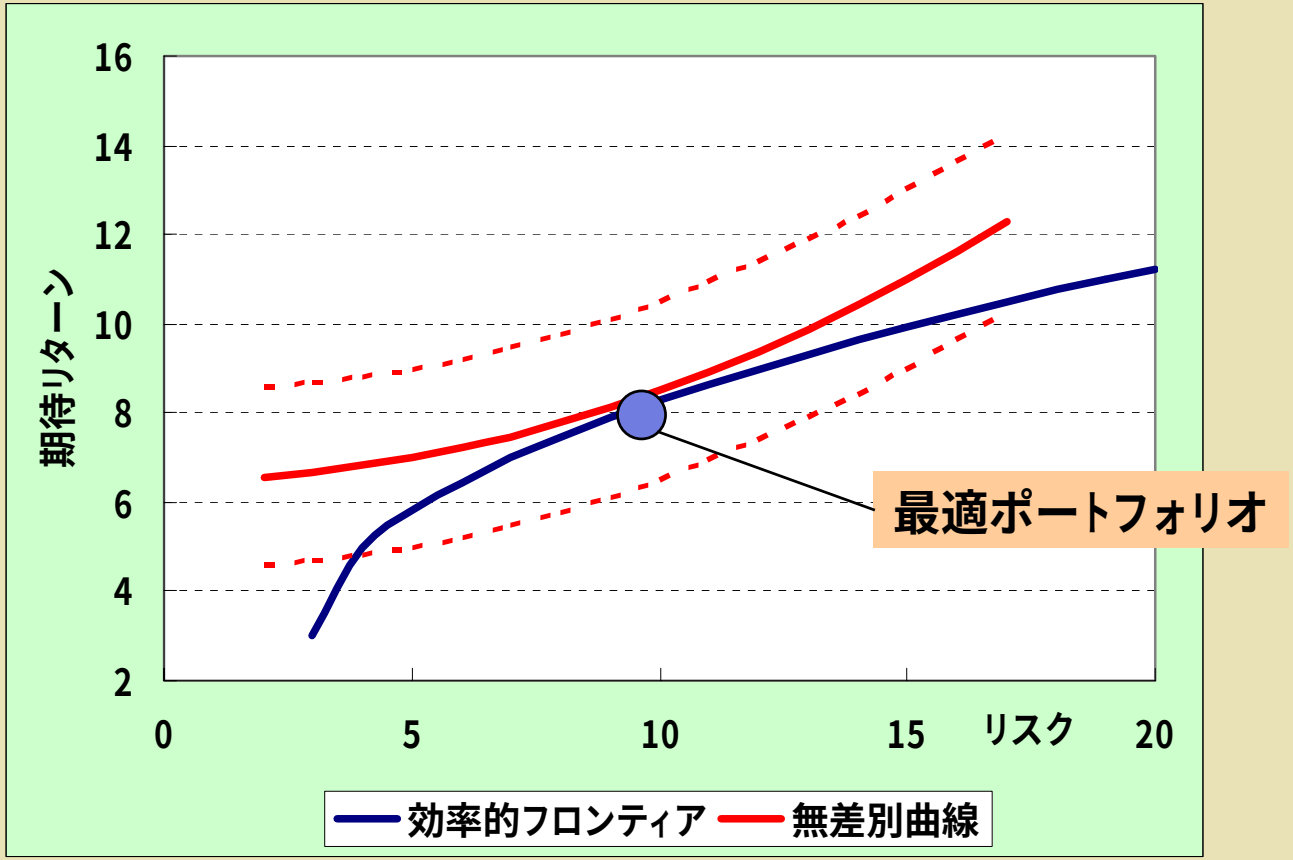
一般の場合

- 各資産の保有比率を変化させたときのポートフォリオのリスク－リターンの対応図の例（4資産の場合）
- 理論的には、どのポートフォリオを選択するかは許容できるリスクを所与としたときに、期待リターンが最大化されるようなポートフォリオが選択される。

各リスクに対する最適ポートフォリオの期待リターンを結んだ線を効率的フロンティア（放物線の形）と呼ぶ。



最適ポートフォリオの決定



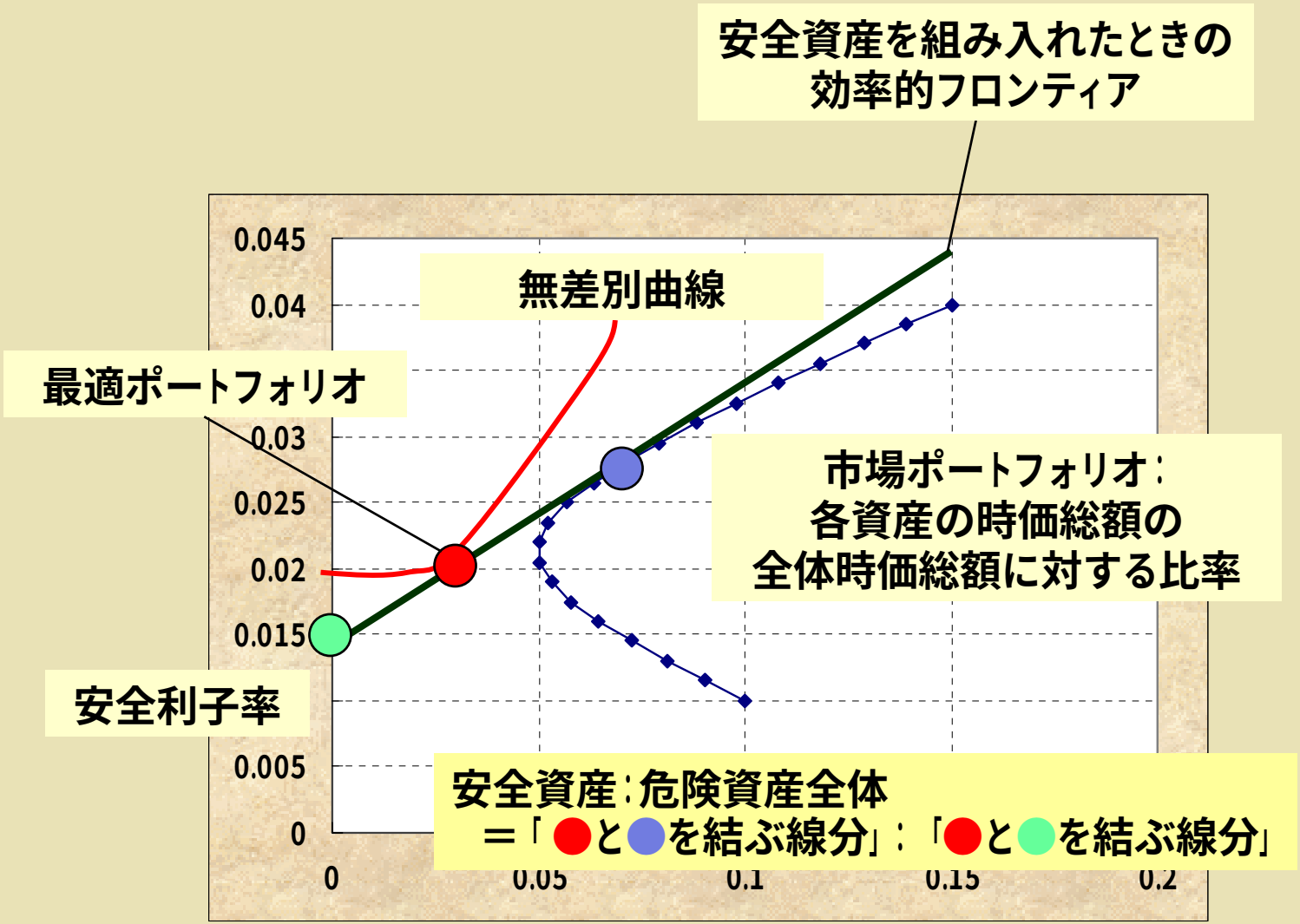
効率的フロンティアとリスク回避型の無差別曲線（期待効用が同じリスクとリターンの集合を表す曲線群）の接点が「最適ポートフォリオ」となる

(トービンの) 分離定理

- (1つの) 安全資産と複数の危険資産からなる最適ポートフォリオを求めるときに
  - 各危険資産への最適配分比率
  - 安全資産と危険資産全体への最適配分比率

  は独立に考えることが出来るという定理
  (2ファンド分離定理など他の言い方もある)
- 実際に
  - 各危険資産への最適配分比率は、安全利子率を表す点から危険資産のみから得られる効率的フロンティアへ引いた接線の接点で示される
    (これを「市場ポートフォリオ」と呼ぶ)
  - 安全資産と危険資産全体への最適配分比率は、上記の接線と無差別曲線の接点によって決まる

(トービンの) 分離定理


安全資産を組み入れたときの
効率的フロンティア
無差別曲線
最適ポートフォリオ
市場ポートフォリオ：
各資産の時価総額の
全体時価総額に対する比率
安全利子率
安全資産：危険資産全体
＝「●と●を結ぶ線分」：「●と●を結ぶ線分」
0.045
0.04
0.03
0.025
0.02
0.015
0.005
0
0
0.05
0.1
0.15
0.2

確率の話

確率変数と確率分布

- 現時点ではわからない将来の値を表現する道具が「確率変数」
- 確率変数を考える際に重要なことは
  - どのような値をとりうるか？
  - それぞれの値がどのような確率で起こるか？
- 確率変数の取りうる値とその確率の組み合わせを表したものが「確率分布」

確率分布の例

リターン	-10%	5%	20%
確率	0.4	0.5	0.1

期待値

- 確率変数の期待値 (平均)
  - 確率変数が有限個の値だけをとる場合には、それぞれの「値」と「その値をとる確率」の積をとり、すべての場合について和を取ったものが期待値 (平均)

確率変数Xの値	X_1	X_2	・・・	X_N
確率	P_1	P_2	・・・	P_N

$$\text{期待値}: E[X] = \sum_{i=1}^{N} P_i X_i$$

  - 一般的には確率変数の期待値は、確率変数に密度関数をかけて積分することで計算される

$$\text{期待値}: E[X] = \int x p(x) dx \qquad p(x): \text{密度関数}$$

分散

- 確率変数の分散
  - 確率変数が有限個の値だけをとる場合には、それぞれの「値と平均の差の2乗」と「対応する確率」との積をとり、すべての場合について和を取ったものが分散

確率変数Xの値	X_1	X_2	・・・	X_N
確率	P_1	P_2	・・・	P_N

$$\text{分散}: V[X] = E\left[(X - E[X])^2\right] = \sum_{i=1}^{N} P_i (X_i - E[X])^2$$

  - 分散の正の平方根を「標準偏差」と呼ぶ

共分散

- 2つの確率変数の共分散
  - 2つの確率変数X, Y の確率分布が以下で与えられるとする。

確率変数Xの値	X_1	X_2	・・・	X_N
確率変数Yの値	Y_1	Y_2	・・・	Y_N
確率	P_1	P_2	・・・	P_N

$$\text{散}: CoV[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$
$$= \sum_{i=1}^{N} P_i (X_i - E[X])(Y_i - E[Y])$$

  - 共分散とは、確率変数X,Y それぞれのデータ値が平均からどれくらいずれているかを、お互いのずれの方向性の一致具合を符号でとらえ、全体で平均化したものと言える

相関係数

- 2つの確率変数の相関係数
  - 2つの確率変数X, Y に対する相関係数は「共分散÷両方の変数の標準偏差」で与えられる。

$$\text{相関係数}: \rho[X,Y] = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{V[X]}\sqrt{V[Y]}}$$

  - 共分散は2つのグループのデータ値の水準（単位）に影響されるが、相関係数は単位に影響されない
  - 相関係数は次の関係を満たす

$$-1 \le \rho[X,Y] \le 1$$

$$Y = aX + b$$

$$\Rightarrow \rho[X,Y] = 1(a>0),\quad -1(a<0),\quad 0(a=0)$$

「相関係数が0に近い」ということは2つのグループが線形関係にはないということを示しているだけで「全く関係がない」ということを意味しているのではないことに注意

共分散行列

- 3つ以上の変数の共分散は次のように行列を用いて表す

$X_1, \cdots, X_N$ という N 個の確率変数があると　する。

$$\sigma_i^2 := V[X_i],$$

$$\sigma_{i,j} := Cov[X_i, X_j]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \cdots & \sigma_{1,N} \\ \sigma_{1,2} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \cdots & \sigma_{2,N} \\ \sigma_{1,3} & \sigma_{2,3} & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3,N} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \sigma_{1,N} & \sigma_{2,N} & \sigma_{3,N} & \cdots & \sigma_N^2 \end{array}\right)$$

相関行列

- 同様に3つ以上の変数の相関は次のように行列を用いて表す

$X_1, \cdots, X_N$ という N 個の確率変数があると　する。

$$\rho_{i,j} := \frac{Cov\left[X_i, X_j\right]}{\sqrt{V\left[X_i\right]}\sqrt{V\left[X_j\right]}}$$

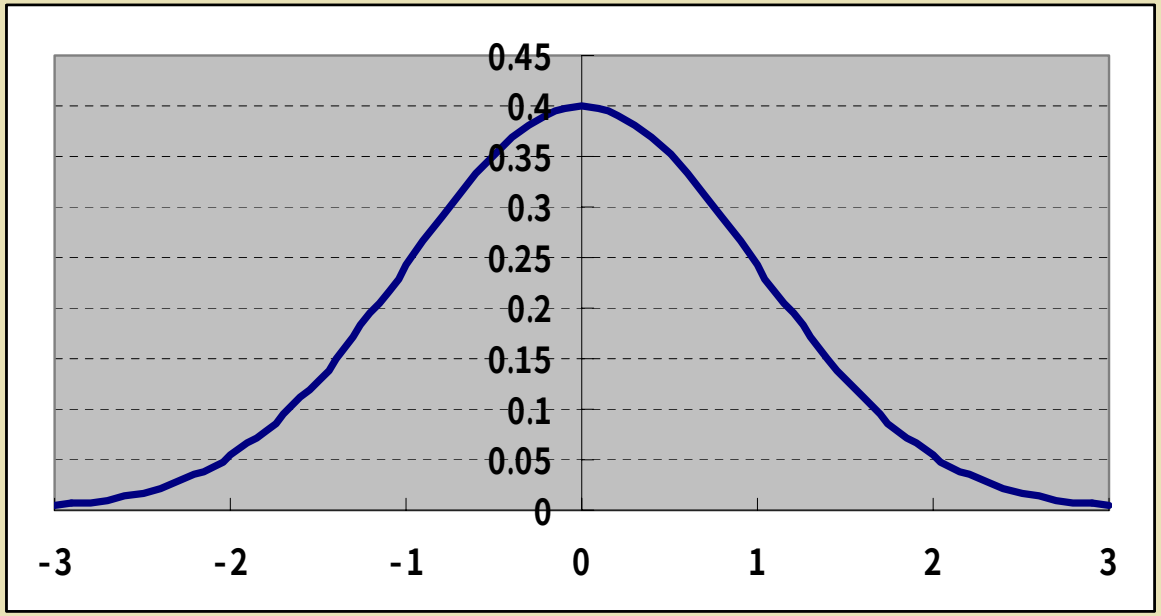
$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & \cdots & \rho_{1,N} \\ \rho_{1,2} & 1 & \rho_{2,3} & \cdots & \rho_{2,N} \\ \rho_{1,3} & \rho_{2,3} & 1 & \cdots & \rho_{3,N} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \rho_{1,N} & \rho_{2,N} & \rho_{3,N} & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

知っておきたい確率分布～正規分布

- **正規分布**(Normal Distribution)
  - 連続値をとる確率変数の確率分布の中で特に重要な働きをする
    - 収益率（リターン）の分布として良く用いられる
    - 中心極限定理（同じ分布に従う確率変数の独立な観測値の和の分布は観測数を増加させると正規分布に近づいていく）
  - 平均と分散（or 標準偏差）の2つのパラメータで決定される

知っておきたい確率分布～正規分布

- 標準正規分布（平均0,分散1）の密度関数グラフ



- 平均＝中央値のところが最も密度が高い
- 平均に関して左右対称

知っておきたい確率分布～正規分布

- Xが標準正規分布（平均0,分散1）に従うとき

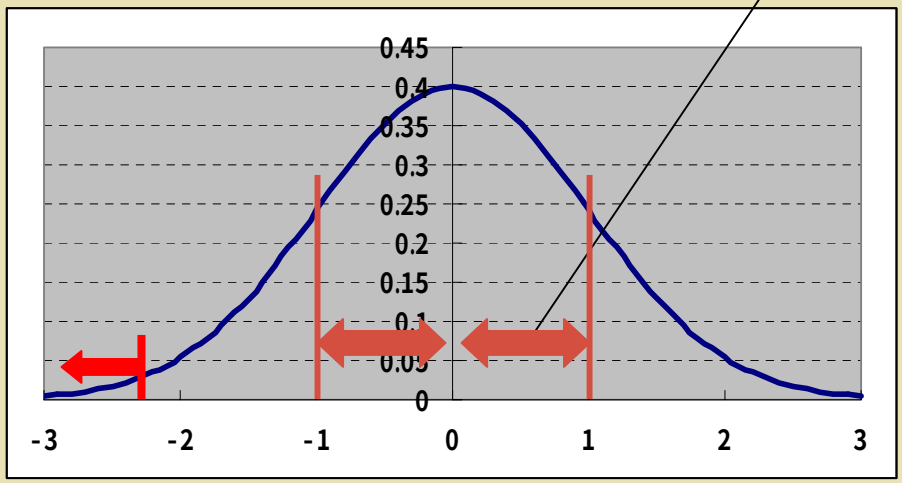
$$P(X \geq 0) = P(X \leq 0) = 0.5$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) \cong 0.6827$$

$$P(-1.96 \leq X \leq 1.96) \cong 0.95$$

$$P(X \leq -2.33) \cong 0.99$$

ボラティリティ



知っておきたい確率分布～正規分布

標準正規分布関数に対しては
NORMSDIST(c) がある

- **正規分布の計算** (Excel)
  - NORMDIST(c, **μ**, **σ**,TRUE or FALSE)
  - **4番目の引数を** TRUE **にすると「分布関数」**

$$F(c)=\int_{-\infty}^{c}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

  - **4番目の引数を** FALSE **にすると「密度関数」**

$$f(c)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(c-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

NORMDIST(0, 0, 1,TRUE) **＝？**, NORMDIST(0, 0, 1, FALSE) **＝？**