イノベーションマネジメント研究科
技術経営専攻

コーポレートファイナンス

第5講：消費と貯蓄の選択、金利の期間構造

東京工業大学イノベーションマネジメント研究科
中川　秀敏
E-mail: nakagawa@mot.titech.ac.jp
Office Hour : 13:00-14:30, every Tuesday, at W9-105

※講義資料は、講義前日の午後5時までにはアップするので事前に
http://www.craft.titech.ac.jp/~nakagawa/dir2/lecture.html#TIT2005_2
から各自でダウンロードして用意すること。

今回の内容

- 金利についての基礎知識
- 消費と貯蓄の選択：異時点間の選択理論（経済学的な議論）
- 金利の期間構造

金利についての基礎知識

- 「現在の1万円」と「1年後の1万円」のどちらの方が価値が高いと言えるか？
  - (答え) 現在の1万円の方が価値が高い
  - いま1万円受け取って金融機関に預ければ(日本は恐ろしいほど低金利ではあるが・・・) いくらかの利子がつくので、1年後には1万円より大きい金額になるからである
  - 金利は「時間の価値」を金銭的価値で表示したものと思える

金利についての基礎知識

- 単利と複利
  - 1万円を年率4%の金利で5年間預けた場合の年単利と年複利での比較

単利

	利子	元利累計
1年後	400	10,400
2年後	400	10,800
3年後	400	11,200
4年後	400	11,600
5年後	400	12,000

複利

	利子	元利累計
1年後	400	10,400
2年後	416	10,816
3年後	432.64	11,249
4年後	449.9456	11,699
5年後	467.9434	12,167

N年後の元利合計

$= \text{元本} \times (1 + \text{年利} \times N)$

N年後の元利合計

$= \text{元本} \times (1 + \text{年利})^N$

複利は「利子」も同じ金利で再投資していくという考え方

金利についての基礎知識

- 複利
  - 1万円を“年率4％”の金利で5年間預けた場合の半年複利と月複利と連続複利の比較

元利合計の推移

	半年複利	月複利	連続複利
0.5年後	10200	10201.67	10,202
1年後	10404	10407.42	10,408
1.5年後	10612.08	10617.31	10,618
2年後	10824.32	10831.43	10,833
2.5年後	11040.81	11049.87	11,052
3年後	11261.62	11272.72	11,275
3.5年後	11486.86	11500.06	11,503
4年後	11716.59	11731.99	11,735
4.5年後	11950.93	11968.59	11,972
5年後	12189.94	12209.97	12,214

【N年後の元利合計】

（半年複利の場合）

$$\text{元本} \times \left(1 + \frac{\text{年率}}{2}\right)^{2N}$$

（月複利の場合）

$$\text{元本} \times \left(1 + \frac{\text{年率}}{12}\right)^{12N}$$

（連続複利の場合）

$$\text{元本} \times e^{\text{年率} \times N} \quad (e \cong 2.718)$$

金利についての基礎知識

- **練習問題**（まず計算式を書いてみよ）
  1. 100万円を年利4%の金利で半年複利で2年間運用したら、2年後元利合わせていくらになるか？
  2. 年利4%で半年複利で3年間運用して元利合わせて100万円にするためには、当初いくら必要になるか？
  3. 年複利で6年間運用して当初の元金を2倍にするためには年利はいくらである必要があるか？

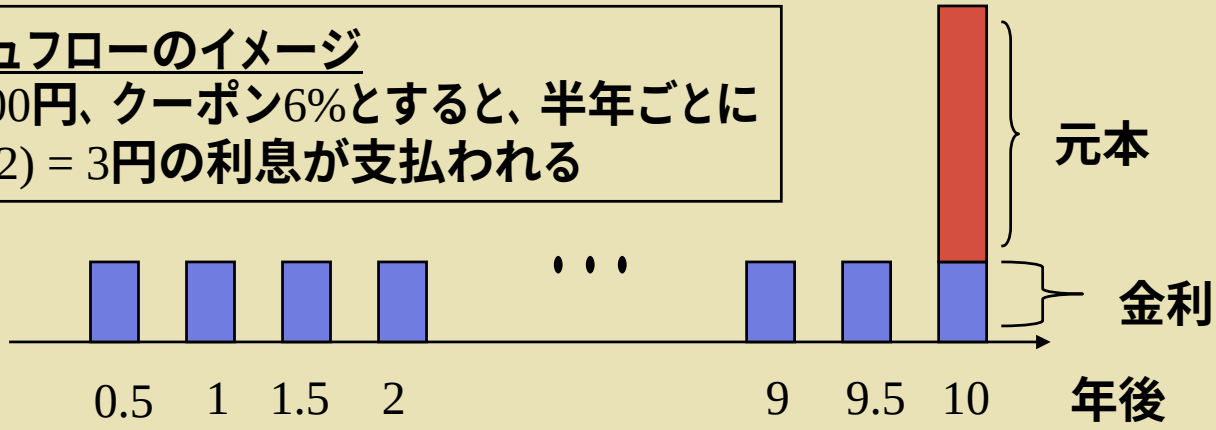
金利についての基礎知識

- 金利と利回りの違い
  - 「金利」はお金を貸借する最初の時点で決め、将来に適用されるもの。適用される期間ごとに異なることが普通
  - 「利回り」はお金を運用したときの最初と最後を比較して、結果的にその期間でどのくらい当初のお金が増減したかを表すもの
  - 例えば、固定利付債の場合、「クーポン」が表面利率（＝発行時に決められた金利）を表す。実際は市場で取引され価格変動するので、その時点での購入価格と将来の元利収入を比較した「利回り」を計算して、売買の判断を行うことになる。

金利についての基礎知識

- 固定利付債（満期10年、半年ごと利払い）

予定キャッシュフローのイメージ
元本(額面) 100円、クーポン6%とすると、半年ごとに
100×(0.06÷2) = 3円の利息が支払われる



(発行時の最終) 利回りは以下の方程式の解として計算される

$$\text{価格} = \sum_{n=1}^{20} \frac{\text{元本} \times \frac{\text{表面利率}}{2}}{\left(1+\frac{\text{利回り}}{2}\right)^{n}} + \frac{\text{元本}}{\left(1+\frac{\text{利回り}}{2}\right)^{20}}$$

消費と貯蓄の選択

- 現在（第1期）と将来（第2期）の2つの期を考える。それぞれどれだけ消費すればトータルで満足度が最も高くなるか？
  - 全体での予算制約があるので、第1期も第2期も好きなだけ消費を増やせるわけではない
  - ただし、貯蓄または借入を通じて、第1期の消費から生じる予算の余剰分や不足分を第2期で調整することができる
  - 貯蓄も借入も同じ利子率で希望するだけ行うことが可能と仮定（完全競争市場）

消費と貯蓄の選択

- **記号**

$U(c_1, c_2)$：消費に対する第1期、第2期トータルの効用関数

Y_i：第i期の稼得所得$(i = 1,2)$

r：利子率

所与の条件

C_i：第i期の消費$(i = 1,2)$ ← これを決める

- **個人の効用最大化問題**

$$Maximize\ \ U(C_1, C_2)$$

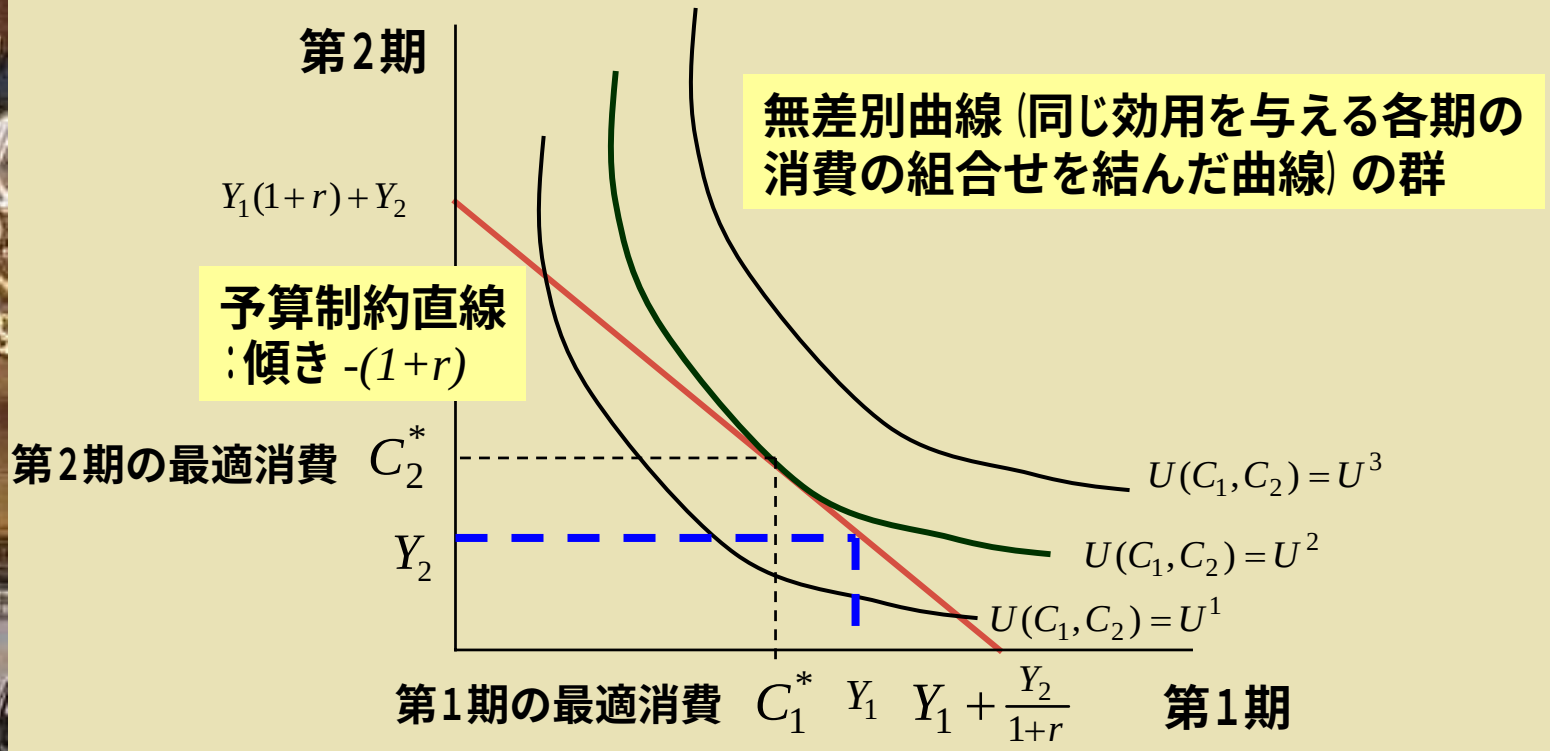
$$subject\ to\ C_1 + \frac{1}{1+r}C_2 = Y_1 + \frac{1}{1+r}Y_2$$

予算制約式

消費と貯蓄の選択

- 効用最大化の条件

効用関数を表す曲線が予算制約直線に接すること



消費と貯蓄の選択

- **効用最大化の条件** 最適消費の組(C_1^*, C_2^*)が満たす条件

$$-\left.\frac{\partial U / \partial C_1}{\partial U / \partial C_2}\right|_{(C_1^*, C_2^*)} = -(1+r)$$

接線の傾きの一致条件
(陰関数定理)

$$C_1^* + \frac{1}{1+r} C_2^* = Y_1 + \frac{1}{1+r} Y_2$$

接点が予算制約線上にあるという条件

$\frac{\partial U}{\partial C_1}$: C_1を微小に増加させたときの効用の変化率 (偏微分係数)

以下で定義される「(時間) 限界代替率」は、現在消費を1単位減らしたときに将来消費をどれだけ増やせば効用が保たれるかを表している。

(時間) 限界代替率 $MRS_{12} := \frac{\partial U / \partial C_1}{\partial U / \partial C_2} \cong -\frac{\Delta C_2}{\Delta C_1}$

最初の条件は「限界代替率$=1+r$」と解釈することができる。

消費と貯蓄の選択

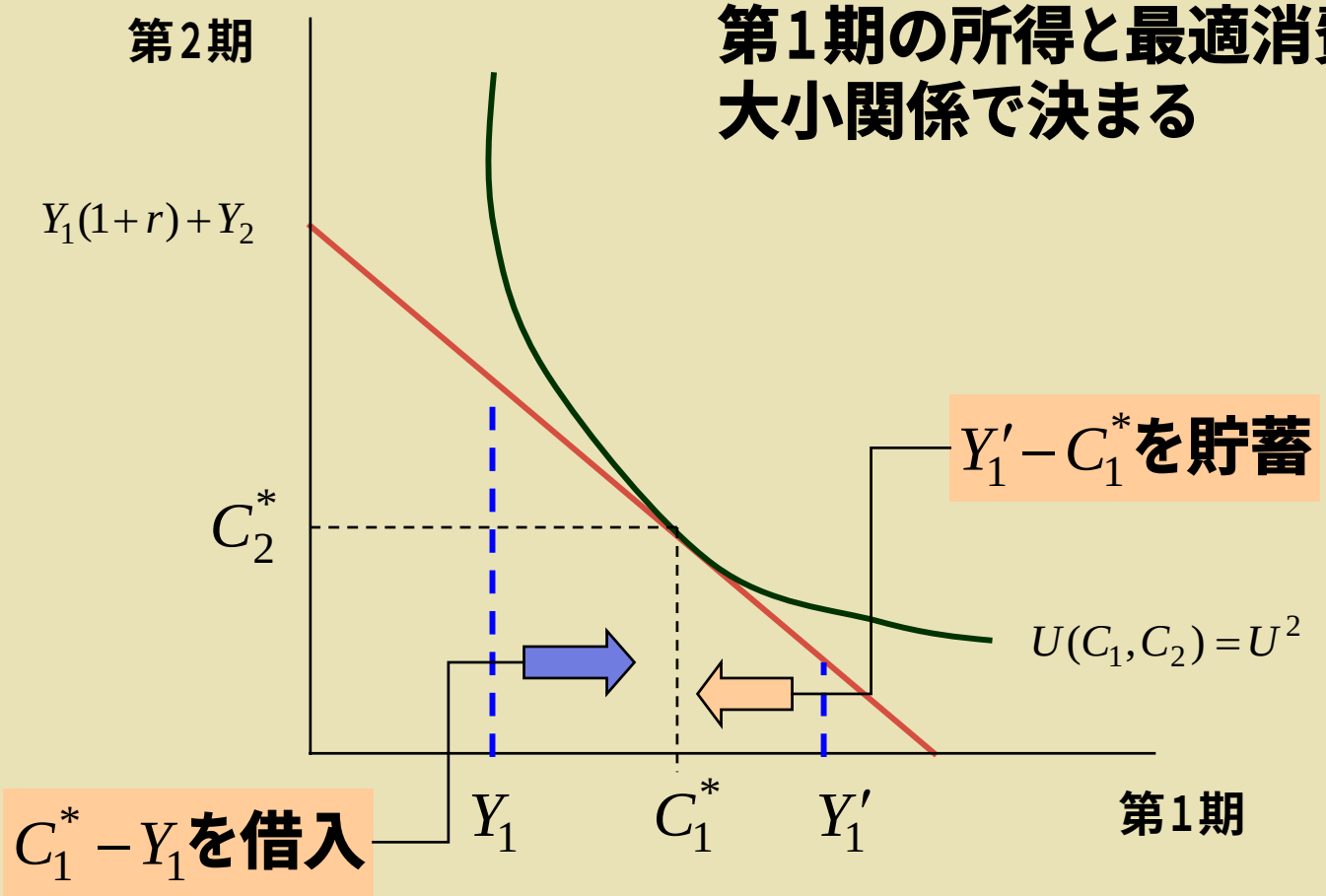
- 効用を最大化する消費

C_1^*, C_2^* はいずれも Y_1, Y_2, r によって決まる。

  - 現在と将来の所得パターンが変化した場合
    - 予算制約直線が平行移動する（傾きは変わらず、切片は変化）ことで最適消費の組が変化する
  - 利子率が変化した場合
    - 予算制約直線が、（現在所得, 将来所得）の組の点を中心に回転する（傾きと切片が変化）ことで最適消費の組が変化する

消費と貯蓄の選択

- 貯蓄 or 借入



金利と貯蓄

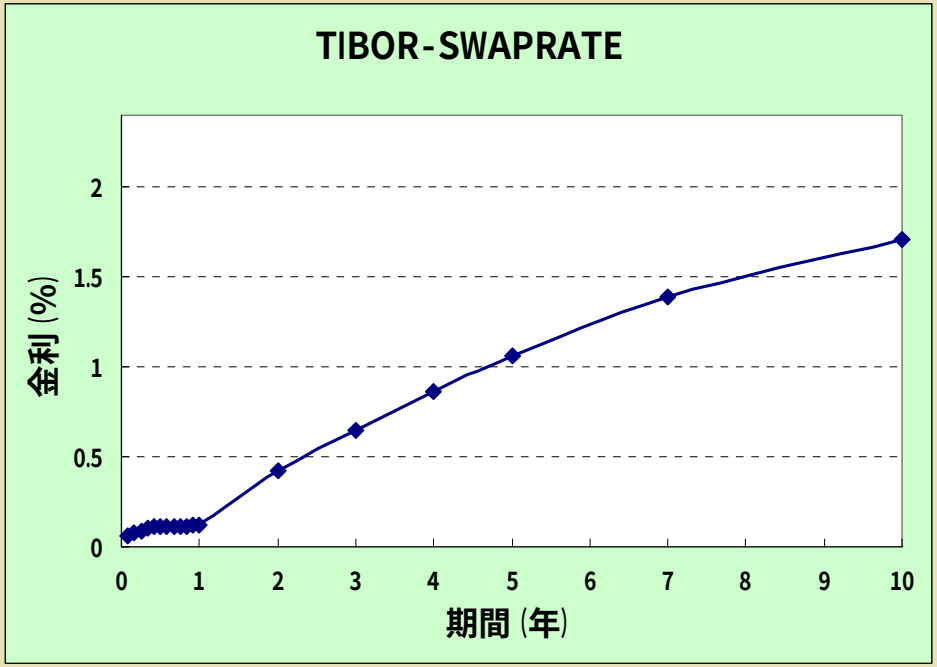
- 利子率の上昇が貯蓄に与える影響を考察する
  - 正の貯蓄主体の場合
    - 代替効果：現在消費が減少→貯蓄を**増加**させる方向
    - 所得効果：現在消費を増加→貯蓄を減少させる方向
    - 全体として貯蓄が増加するかどうかは、2つの効果のどちらが上回るかによる
  - 負の貯蓄（借入）主体の場合
    - 代替効果：現在消費が減少→借入額を減少させる方向
    - 所得効果：現在消費が減少→借入額を減少させる方向
    - 全体として借入額は減少する

代替効果：（実質的な所得変化の影響を除いた）第1期と第2期の相対的な価格変化による消費への効果

所得効果：実質的な所得変化による消費への効果

金利リスク

- **金利リスクの特性**
  - **期間構造**(Term structure)**をもつ。つまり、金利水準は金利が適用される期間ごとに、互いに複雑な関係で依存し合う構造をもつ**



【2005年11月4日の金利】
1年以下はTIBOR,
2年以降はスワップレートのMID値

TIBOR:Tokyo InterBank Offered Rate の略（全国銀行協会が集計し平均値を提示している無担保コール市場の実勢レート）
LIBOR: London InterBank Offered Rate の略

スワップ レート：固定金利と変動金利（例：6ヶ月LIBOR）を交換する契約における「固定金利」のこと

金利リスク

- イールドカーブ
  - 適用する期間と金利の関係を図示した曲線
  - 「国債市場」と「インターバンク市場（LIBOR, SWAP）」のスポットレートの2つが基本的
  - イールドカーブ全体の変動を考慮する必要があるが、実際には決まった年限（グリッドポイント）についての金利の変化を考えることが多い

例：国債の場合

1M, 3M, 6M, 1Y, 2Y, 3Y, 5Y, 7Y, 10Y, 15Y, 20Y, 30Y

金利リスク

- 金利の期間構造に対する仮説
  - 純粋期待仮説：将来の金利についての予測が、現在の金利水準に織り込まれており、例えば将来金利が上昇すると予想されれば、イールドカーブは右上がりの形状になる。
  - 流動性選好仮説：投資家は長期の投資はリスクが高いと考えるため、リスクに見合ったリターンをプレミアムとして要求するため、長期金利が高くなる傾向がある
  - 市場分断仮説：短期・中期・長期の金利は、それぞれ別の需給関係に支配されて決定されている。

借入を考えるうえで・・・

- 期間
  - 長く借りるほど金利は高めに設定される
- 信用力
  - 信用力が低いと判断されるほど、金利は高めに設定される
- 固定金利と変動金利
  - 固定金利：期間を通じて一定に適用される。市場の金利が低下していくと負担が大きくなる
  - 変動金利：通常半年ごとに、次の半年間の適用金利を見直して決める。市場の金利が上昇していくと負担が大きくなる。
- 元本の返済パターン
  - 債券は「満期一括返済」が多い
  - 融資は「元金均等返済」が多い
  - 最近はいろいろな商品がある(金利デリバティブ等の活用)

金利の期間構造の動向に注意して、適切に金利リスクをヘッジ(回避) していくことが重要

(補足) 損益分岐点分析の応用例

Q. 次のような実績のある製品A,B,Cのうち生産した分が確実に販売できるとすると、増産すべき製品はどれか？

	製品A	製品B	製品C
単価	1,000	1,000	1,000
販売数	1,500	900	600
売上高	1,500,000	900,000	600,000
変動比率	0.6	0.8	0.5
変動費	900,000	720,000	300,000
限界利益	600,000	180,000	300,000
固定費	450,000	200,000	400,000
営業利益	150,000	-20,000	-100,000