# 情報認識(第2回) 「統計的パターン認識の基礎」

■講師: 杉山 将(計算工学専攻)

■居室: W8E-505

■電子メール: <u>sugi@cs.titech.ac.jp</u>

# パターン認識の過程

入力パターン 観測 前処理 特徴抽出 出力カテゴリ 識別

## パターン認識の過程(続き)

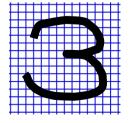
- ■観測: 与えられた入力パターンを認識機に取り込む操作(スキャナでの文字の取り込み)
- ■前処理:後に続く処理を容易にするための処理 (文字領域の切り出し,文字の大きさと中心の正 規化,雑音除去,色の調整など)
- ■特徴抽出:パターンを分類するのに有益な特徴 の抽出
- ■識別:抽出した特徴を用いて、入力パターンが属すると思われるカテゴリの決定

## パターンとカテゴリの表記

- ■パターン空間(pattern space) D ( $\subset R^d$ ): パターンの定義域(domain)
- $\omega_i : i$  番目のカテゴリ(category)
- m:カテゴリの数

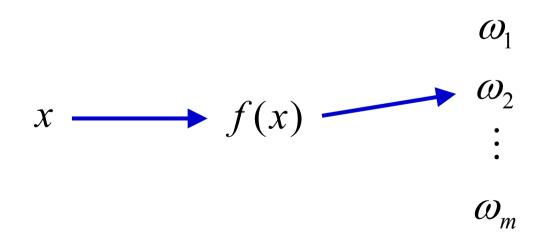
#### 手書き文字認識の例

- ■スキャナで取り込んだ文字画像が16×16画素のとき、パターン x は各画素の濃度を縦に並べた256次元のベクトル.
- ■厳密には画素値は実数ではない(例えば8 ビット, 即ち256階調の離散値)が, [0,1] に正 規化した実数値として扱う.
- **■パターン空間は** *D* = [0,1]<sup>256</sup> .
- ■カテゴリは各文字に対応.



#### 識別関数

- ■パターンx をそれが属するカテゴリ $\omega_i$ に対応付けることがパターン認識の目的.
- ■そのような変換を識別関数(discrimination function)とよび, f(x) で表す.



#### 決定領域と決定境界

- **| 決定領域(decision region)**  $D_i$ :カテゴリ $\omega_i$ のパターンが属する領域
- ■決定境界(decision boundary): いくつかの 決定領域どうしの境界

識別関数を求めること

=パターン空間を決定領域に分割すること

## 統計的パターン認識

- ■識別関数は未知.
- ■カテゴリ $ω_i$  やパターンx を確率変数として扱い、それらの統計的な性質を利用して識別関数を構成する.



統計的パターン認識 (statistical pattern recognition)

# 確率・統計の復習

## 確率変数

■カテゴリ $\omega_i$  やパターンx を確率変数として扱えば、次のような「確率」が定義できる.

$$p(\omega_i), p(x), p(\omega_i, x), p(\omega_i \mid x), p(x \mid \omega_i)$$

- ■カテゴリ $\omega_i$ :離散型(discrete type)の確率変数
- ■パターンx:連続型(continuous type)の確率変数

## 確率関数と確率密度関数

 $p(\omega_i)$ :カテゴリ $\omega_i$ の生起確率を表す確率 関数(probability function)

$$p(\omega_i) \ge 0$$
 for all  $i = 1, 2, ..., m$   
$$\sum_{i=1}^{m} p(\omega_i) = 1$$

■ p(x):パターン x の確率密度関数 (probability density function)

$$p(x) \ge 0$$
 for all  $x \in D$   
$$\int_D p(x) dx = 1$$

#### 同時確率

- $p(\omega_i, x) : \omega_i \succeq x$  の同時確率(joint probability)
- ■周辺化(marginalization):

$$\sum_{i=1}^{m} p(\omega_i, x) = p(x)$$

$$\int_{D} p(\omega_i, x) dx = p(\omega_i)$$
周辺確率
(marginal probability)

## 条件付き確率

 $p(x|\omega_i), p(\omega_i|x)$  : 条件付き確率 (conditional probability)

$$p(\omega_i \mid x)p(x) = p(\omega_i, x) = p(x \mid \omega_i)p(\omega_i)$$

■ベイズの定理(Bayes' theorem):

$$p(\omega_i \mid x) = \frac{p(x \mid \omega_i)p(\omega_i)}{p(x)}$$

## 事前確率と事後確率

- ■事前確率(a priori probability)  $p(\omega_i)$  : パターンを知る前のカテゴリの出現確率
- 事後確率(a posteriori probability)  $p(\omega_i | x)$  : パターンを知った後のカテゴリの出現確率

# 期待值•分散共分散行列•独立性

■期待値(expectation):

$$E[x] = \int_D x p(x) dx$$

■分散共分散行列(variance covariance matrix):

$$V[x] = E[(x - E[x])^{T}(x - E[x])]$$

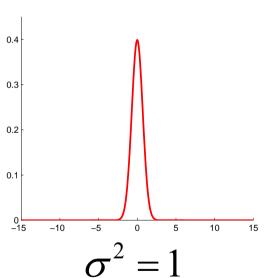
■ x と x'が独立(independent):

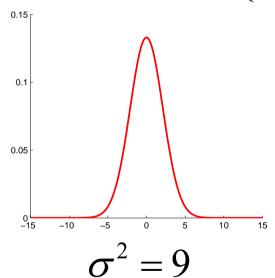
$$p(x,x') = p(x)p(x')$$

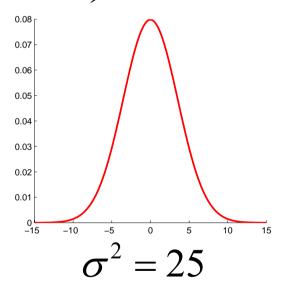
## 正規分布

**2**つのパラメータ:  $\mu$ , $\sigma^2$ 

$$p(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$







■正規分布の平均と分散:

$$E[x] = \mu \qquad V[x] = \sigma^2$$

#### 多次元正規分布

- **■** d 次元の確率ベクトル:  $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(d)})^T$
- ■2つのパラメータ:
  - d 次元ベクトル μ
  - $\bullet d$  次元正值行列  $\Sigma$

$$p(x; \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)\right)$$

■正規分布の期待値、分散共分散行列

$$E[x] = \mu$$
  $V[x] = \Sigma$ 

#### 多次元正規分布(つづき)

■共分散がゼロ(即ち  $\Sigma = diag(\sigma_i^2)$ ) のとき

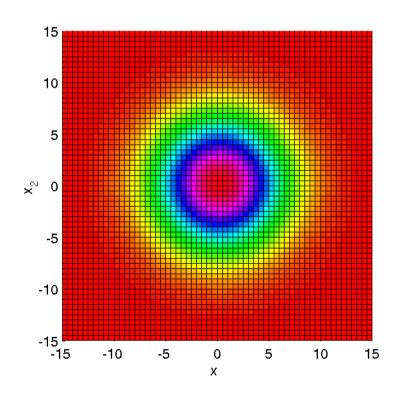
$$p(x; \mu, \{\sigma_i^2\}_{i=1}^d) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \prod_{i=1}^d \sigma_i} \exp\left(-\sum_{i=1}^d \frac{(x^{(i)} - \mu^{(i)})^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

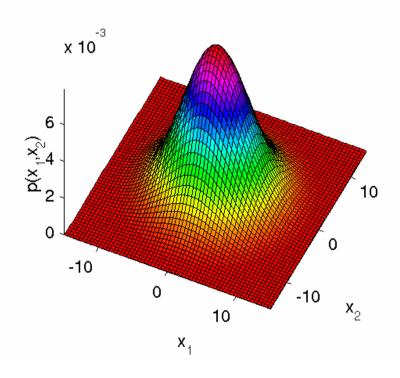
■さらに分散が等しい(即ち  $\Sigma = \sigma^2 I$  )のとき

$$p(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^T (x-\mu)}{2\sigma^2}\right)$$

# 多次元正規分布の例(1)

$$d = 2 \qquad \mu = (0,0)^T \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$





# 多次元正規分布の例(2)

$$d = 2 \qquad \mu = (0,0)^T \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$$

