ロボット工学第二２００４　補遺
倉林大輔

11　マニピュレータの同定

11.1　ラグランジュの運動方程式に基づく同定

モデルベースでロボットを制御する場合、制御式に用いるモデル（運動方程式のパラメタ）が正確に分かっていないと、制御性能が保障されない。リンクの長さや角度、質量といったことは比較的容易に調べることができるが、質量中心位置や慣性テンソル、摩擦力などはなかなか正確な値を調べることは難しい。これらのパラメタを、マニピュレータの動作データから何らかの方法で知ることができれば、制御入力生成において大変便利であり実用的である。本章では、ラグランジュの運動方程式に基づくパラメタ同定法について紹介する。

ラグランジュの運動方程式によって与えられる一般化力（関節にかかるトルク）は (186) であった。

$$\begin{aligned}\tau_i &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} tr\left(\frac{\partial^0 T_k}{\partial q_j}\hat{H}_k\frac{\partial^0 T_k}{\partial q_i}^T\right)\ddot{q}_j \\ &\quad+\sum_{k=i}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{m=1}^{k} tr\left(\frac{\partial^2\,{}^0T_k}{\partial q_i\partial q_m}\hat{H}_k\frac{\partial^0 T_k}{\partial q_i}^T\right)\dot{q_j}\dot{q_m}-\sum_{j=i}^{n} m_j\tilde{\boldsymbol{g}}^T\frac{\partial^0 T_j}{\partial q_i}{}^j\hat{\boldsymbol{s}}_j\end{aligned} \tag{186}$$

なおここで用いられている記号は以下の意味であった。

$$\begin{aligned} n &: \text{リンク数} \\ \tilde{\boldsymbol{g}} &= [\tilde{g}_x,\ \tilde{g}_y,\ \tilde{g}_z,\ 0]^T \quad \Sigma_0\text{上の重力加速度ベクトル} \\ \hat{s}_{ix} &= \int_{link\ i} {}^i r_x dm/m_i \quad \text{質量中心位置} \\ {}^i\hat{\boldsymbol{s}}_i &= [\hat{s}_{ix},\ \hat{s}_{iy},\ \hat{s}_{iz}]^T \\ \hat{H}_i &: \text{擬似慣性行列} \end{aligned}$$

さらに、$m_i{}^i\hat{\boldsymbol{s}}_i$ は $\hat{H}_i$ の最終列に含まれているので、$\hat{H}_i$ の要素が同定できればマニピュレータの運動方程式を同定できたことになる。

11.2　関節トルクからの推定

いま、同定対象のマニピュレータについて、常に $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$, $\ddot{\boldsymbol{q}}$ そして $\boldsymbol{\tau}$ が計測できるものとする。$\hat{H}_i$ を構成するパラメタを並べたベクトルを $\boldsymbol{\phi}_i$ として (187) とする。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}_i &= [\phi_{i1},\ \phi_{i2},\ \cdots,\ \phi_{i10}]^T \\ &= [m_i,\ m_i\hat{s}_{ix},\ m_i\hat{s}_{iy},\ m_i\hat{s}_{iz},\ \hat{I}_{ixx},\ \hat{I}_{iyy},\ \hat{I}_{izz},\ \hat{I}_{ixy},\ \hat{I}_{iyz},\ \hat{I}_{ixz}]^T\end{aligned} \tag{187}$$

運動方程式 (186) は $\hat{H}_i$ について線形和になっているので、(188) のように $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$, $\ddot{\boldsymbol{q}}$ を引数とする関数 $\boldsymbol{k}_i(\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}},\ \ddot{\boldsymbol{q}})$ を用いて表すことができる。これを i についてまとめれば (189) となる。

$$\begin{aligned}\tau_i &= \boldsymbol{k}_i(\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}},\ \ddot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{\Phi} &= [\boldsymbol{\phi}_1^T,\ \boldsymbol{\phi}_2^T,\ \cdots,\ \boldsymbol{\phi}_n^T]^T\end{aligned} \tag{188}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= K\boldsymbol{\Phi} \qquad (189)\\
\boldsymbol{\tau} &= [\tau_1,\ \tau_2,\ \cdots,\ \tau_n]^T\\
K &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_1 \\ \boldsymbol{k}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{k}_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

上式によれば、K は $\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}},\ \ddot{\boldsymbol{q}}$ によって変化するので、条件を変えて（マニピュレータを動かして）複数のデータをとればその分の連立方程式が得られ、$\boldsymbol{\Phi}$ を推定できるはずである。

11.3 推定可能性

$\boldsymbol{\Phi}$ のパラメタ全てが必ず同定可能かというとそうではない。たとえば K のある列が恒等的にゼロであれば同定のしようがない（運動方程式にも現れないが）。同定可能性については以下のような知見が得られている。

K を $K = K_d L_d$ と分割する。分割のしかたは１つに定まらない。

$$
\begin{aligned}
K_d &: \ \boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}},\ \ddot{\boldsymbol{q}}\text{の関数である } n \times n_d\text{行列}\\
L_d &: \ n_d \times 10n \text{ の定数行列、} rank\ L_d = n_d\\
& \ \ 0 < n_d \leq 10n
\end{aligned}
$$

このうち、n_d が最小となる分割法を１つ選んで、そのときの n_d を n_d^*、$K_d,\ L_d$ を $K_d^*,\ L_d^*$ と書くと、(190) が同定可能なパラメタ（の線形関数）の中で最も次元が大きいものであり、(191) を満たす。

$$
\boldsymbol{\Phi}_d^* = L_d^* \boldsymbol{\Phi} \qquad (190)
$$

$$
\boldsymbol{\tau} = K_d^* \boldsymbol{\Phi}_d^* \qquad (191)
$$

さて、ある時刻において $\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}},\ \ddot{\boldsymbol{q}},\ \boldsymbol{\tau}$ を１組の観測点として、N 個の異なる観測点を集め、それぞれにおける $\boldsymbol{\tau},\ K_d^*$ の値を $\boldsymbol{\tau}(i),\ K_d^*(i)\ (i = 1, 2, \cdots, N)$ と書き、(192) のようにまとめると (193) を得る。

$$
\boldsymbol{\tau}_g = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}(1) \\ \boldsymbol{\tau}(2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\tau}(N) \end{bmatrix}, \qquad K_g^* = \begin{bmatrix} K_d^*(1) \\ K_d^*(2) \\ \vdots \\ K_d^*(N) \end{bmatrix} \qquad (192)
$$

$$
\boldsymbol{\tau}_g = K_g^* \boldsymbol{\Phi}_d^* \qquad (193)
$$

一般に $N \geq n_d^*$ だけのデータを無作為にとれば、ほぼ $rank\ K_g^* = n_d^*$ となることが期待できる。ダメなときは、これが成立するまでデータを追加する。なお、ある n_d が n_d^* であることを確かめるには、$rank\ K_g^* = n_d^*$ であることを示せれば十分である。

あとは、$||\boldsymbol{\tau}_g - K_g^* \boldsymbol{\Phi}_d^*||$ を最小とする解（最小２乗推定値）は擬似逆行列を用いて (194) と得られる。

$$
\boldsymbol{\Phi}_d^* = (K_g^{*T} K_g^*)^{-1} K_g^{*T} \boldsymbol{\tau}_g \qquad (194)
$$

11.4 計算例

図の 2 リンクマニピュレータについて考えよう。運動方程式は (195) で表される。

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= M_{11}\ddot{\theta}_1 + M_{12}\ddot{\theta}_2 + h_{112}\dot{\theta}_2{}^2 + 2h_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + g_1 \\
\tau_2 &= M_{12}\ddot{\theta}_1 + M_{22}\ddot{\theta}_2 + h_{211}\dot{\theta}_1^2 + g_2
\end{aligned}
\tag{195}
$$

ここでパラメタの内容は以下の通りである。

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= m_1\ell g_1^2 + {}^2I_{1zz} + m_2\left[\ell_1^2 + \ell_{g2}^2 + 2\ell_1\left(C_2\hat{s}_{2x} - S_2\hat{s}_{2y}\right)\right] + {}^2I_{2zz} \\
M_{12} &= m_2\left[\ell_{g2}^2 + \ell_1\left(C_2\hat{s}_{2x} - S_2\hat{s}_{2y}\right)\right] + {}^2I_{2zz} \\
M_{22} &= m_2\ell_{g2}^2 + {}^2I_{2zz} \\
\ell_{g1}^2 &= \hat{s}_{1x}^2 + \hat{s}_{1y}^2 \\
\ell_{g2}^2 &= \hat{s}_{2x}^2 + \hat{s}_{2y}^2 \\
-h_{122} = -h_{112} = h_{211} &= m_2\ell_1(\hat{s}_{2x}S_2 + \hat{s}_{2y}C_2) \\
g_1 &= m_1\hat{g}(\hat{s}_{1x}C_1 - \hat{s}_{1y}S_1) + m_2\hat{g}(\ell_1C_1 + \hat{s}_{2x}C_{12} - \hat{s}_{2y}S_{12}) \\
g_2 &= m_2\hat{g}(\hat{s}_{2x}C_{12} - \hat{s}_{2y}S_{12})
\end{aligned}
$$

さて、(187) より

$$
\begin{aligned}
\phi_{i2} &= m_i\hat{s}_{ix} \\
\phi_{i3} &= m_i\hat{s}_{iy} \\
\phi_{i4} &= m_i\hat{s}_{iz} \\
\phi_{i7} &= \hat{I}_{izz} = {}^iI_{izz} + m_i\ell_{gi}^2
\end{aligned}
$$

であるので、(195) は (196) になる。まとめると行列 K は (197) になる。

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \left[\phi_{17} + \phi_{21}\ell_1^2 + \phi_{27} + 2\ell_1(C_1\phi_{22} - S_2\phi_{23})\right]\ddot{\theta}_1 + \left[\phi_{27} + \ell_1(C_2\phi_{22} - S_2\phi_{23})\right]\ddot{\theta}_2 \\
&- \ell_1(S_2\phi_{22} + C_2\phi_{23})(\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + \hat{g}(C_1\phi_{12} - S_1\phi_{13} + \ell_1C_1\phi_{21} + C_{12}\phi_{22} - S_{12}\phi_{23}) \\
\tau_2 &= \left[\phi_{27} + \ell_1(C_2\phi_{22} - S_2\phi_{23})\right]\ddot{\theta}_1 + \phi_{27}\ddot{\theta}_2 + \ell_1(S_2\phi_{22} + C_2\phi_{23})\dot{\theta}_1^2 + \hat{g}(C_{12}\phi_{22} - S_{12}\phi_{23})
\end{aligned}
\tag{196}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} &= K \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi_1} \\ \boldsymbol{\phi_2} \end{bmatrix} \\
K &= \begin{bmatrix}
0 & \hat{g}C_1 & -\hat{g}S_1 & 0 & 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\ell_1^2\ddot{\theta}_1 + \hat{g}\ell_1C_1 & k_{112} & k_{113} & 0 & 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & k_{212} & k_{213} & 0 & 0 & 0 & \theta_1 + \ddot{\theta}_2 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \\
k_{112} &= \ell_1C_2(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - \ell_1S_2(\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + \hat{g}C_{12} \\
k_{212} &= \ell_1C_2\ddot{\theta}_1 + \ell_1S_2\dot{\theta}_1^2 + \hat{g}C_{12} \\
k_{113} &= -\ell_1S_2(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - \ell_1C_2(\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) - \hat{g}S_{12} \\
k_{213} &= -\ell_1S_2\ddot{\theta}_1 + \ell_1C_2\ddot{\theta}_1^2 - \hat{g}S_{12}
\end{aligned}
\tag{197}
$$

さてここで、同定できる変数を調べることにしよう。特定の場合を考えてみる。まず、$\ddot{\theta}_i = \dot{\theta}_i = 0$ という静的な場合を考えてみると、(198) から $\phi_{12} + \ell_1\phi_{21},\ \phi_{13},\ \phi_{22},\ \phi_{23}$ が同定可能である。

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \hat{g}C_1(\phi_{12} + \ell_1\phi_{21}) - \hat{g}S_1\phi_{13} + \hat{g}C_{12}\phi_{22} - \hat{g}S_{12}\phi_{23} \\ \tau_2 &= \hat{g}C_{12}\phi_{22} - \hat{g}S_{12}\phi_{23} \end{aligned} \tag{198}$$

同様に、$\ddot{\theta}_i \neq 0,\ \dot{\theta}_i = 0$ であるときは $\phi_{17} + \ell_1^2\phi_{21},\ \phi_{27}$ が同定可能である。

以上から、$\Phi_d\,(= L_d\Phi)$ として (199) をとると、K_d は (200) となる。この場合、$n_d = 6$ である。

$$\Phi_d = [\phi_{12} + \ell_1\phi_{21},\ \phi_{13},\ \phi_{17} + \ell_1^2\phi_{21},\ \phi_{22},\ \phi_{23},\ \phi_{27}]^T \tag{199}$$

$$K_d = \begin{bmatrix} \hat{g}C_1 & -\hat{g}S_1 & \ddot{\theta}_1 & k_{112} & k_{113} & \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & 0 & k_{212} & k_{213} & \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{200}$$

この K_d について、(i)$\theta_i = \dot{\theta}_i = \ddot{\theta}_i = 0$、(ii)$\theta_1 = \frac{\pi}{2},\ \theta_2 = 0,\ \dot{\theta}_i = \ddot{\theta}_i = 0$、(iii)$\theta_i = \dot{\theta}_i = 0,\ \ddot{\theta}_1 \neq 0,\ \ddot{\theta}_2 = 0$ の 3 計測点についての K_g のランクが 6 になることから、この n_d は n_d^* である。

あとは (194) に代入することで、$\mathbf{\Phi}_d^*$ が求まる。