ロボット工学第二２００４　補遺
倉林大輔

11　運動方程式の性質

11.1　受動性

入力 $\boldsymbol{u}$ と出力 $\boldsymbol{y}$ が同次元とする。$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{y}$ の $[0\ t]$ にわたる積分が、任意の $t > 0$ である固定した有限値 C_0 以下にならないとき、システムは受動的であるという。

$$\int_0^t \boldsymbol{y}^T(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \geq C_0 \tag{186}$$

例えば、

$$\begin{aligned} &R\ddot{\boldsymbol{q}} + Q\dot{\boldsymbol{q}} + P\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u} \\ &\boldsymbol{y} = [O\ I]\begin{bmatrix} \boldsymbol{q} \\ \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} = \dot{\boldsymbol{q}} \end{aligned} \tag{187}$$

は、R、P が正定、Q が非負定であれば受動的である。

証明

まず、$\boldsymbol{u} = 0$ と仮定して、システム (187) のリアプノフ関数の候補として (188) を考える。

$$V(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T R\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T P\boldsymbol{q} \tag{188}$$

すると、(188) の微分は (189) となり、ラ・サールの定理から (189) がリアプノフ関数であることが分かる。

$$\dot{V}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \dot{\boldsymbol{q}}^T(R\ddot{\boldsymbol{q}} + P\boldsymbol{q}) = -\dot{\boldsymbol{q}}^T Q\dot{\boldsymbol{q}} \leq 0 \tag{189}$$

さて、ここで入力と出力の積を積分すると、

$$\begin{aligned} \int_0^t \boldsymbol{y}^T(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau &= \int_0^t \dot{\boldsymbol{q}}^T\left(R\ddot{\boldsymbol{q}} + Q\dot{\boldsymbol{q}} + P\boldsymbol{q}\right)d\tau \\ &= \int_0^t \left\{\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left(\dot{\boldsymbol{q}}^T R\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{q}^T P\boldsymbol{q}\right) + \dot{\boldsymbol{q}}^T Q\dot{\boldsymbol{q}}\right\}d\tau \\ &= V(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)) - V(\boldsymbol{q}(0), \dot{\boldsymbol{q}}(0)) + \int_0^t \dot{\boldsymbol{q}}^T Q\dot{\boldsymbol{q}}\,d\tau \\ &\geq -V(\boldsymbol{q}(0), \dot{\boldsymbol{q}}(0)) \equiv C_0 \end{aligned}$$

である。

受動性の概念は、システム（回路）に留まっているエネルギ量が、入力されたエネルギおよび出力されたエネルギの釣り合いになっているということが元になっている。

11.2　運動方程式の性質

マニピュレータシステムの運動方程式は、一般に (190) と書ける。ここで $h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ は非線形項を含むベクトルであるが、通常の運動方程式と同様に $\dot{\boldsymbol{q}}$ を外に出した形で (191) と表すこともできる。

$$
\begin{aligned}
M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + G(\boldsymbol{q}) &= \boldsymbol{\tau} && (190)\\
M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + G(\boldsymbol{q}) &= \boldsymbol{\tau} && (191)
\end{aligned}
$$

第１項は慣性、第２項は中心・コリオリ力、第３項は重力を表している。この運動方程式の各項には以下の性質がある。

- $M(\boldsymbol{q})$ は対称行列であり、正定行列である。
- マニピュレータの全ての関節が回転関節である場合、以下の不等式を満たす正の定数 λ_m、λ_M が存在する。ただし、$\underline{\lambda}(M)$・$\overline{\lambda}(M)$ はそれぞれ行列 M の最小固有値・最大固有値を表している。

$$
\begin{array}{ccccc}
0 & < & \lambda_m & \leq & \underline{\lambda}(M(\boldsymbol{q})) \\
\overline{\lambda}(M(\boldsymbol{q})) & \leq & \lambda_M & < & \infty
\end{array}
\tag{192}
$$

- $C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ は $\dot{\boldsymbol{q}}$ に関して有界である。すなわち、(193) を満たす C_M が存在する。

$$
||C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})|| \leq C_M(\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{193}
$$

- $C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ は以下の関係を満たす。

$$
\begin{aligned}
C(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{y} &= C(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{x} && (194)\\
C(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}) &= C(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) + \alpha C(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{y}) && (195)
\end{aligned}
$$

- $K = \dot{M}(\boldsymbol{q}) - 2C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ とおくと、K は歪対称行列になっている。つまり、K に関する２次形式は０になる。
- 重力項 $G(\boldsymbol{q})$ は、$\boldsymbol{q}$ が有界であれば有界である。
- 適当なパラメタベクトル $\boldsymbol{x}$ を選ぶと、運動方程式 (190) は既知の関数を要素とする行列 Y と $\boldsymbol{x}$ の積として表現することができる。つまり、(196) の形にすることができる。

$$
Y(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\tau} \tag{196}
$$

11.3 冗長な運動方程式表現と拘束の導入

これまで、マニピュレータの関節角（一般化座標）と手先効果器などの関係を、マニピュレータの構造に基づいて陽に考え、定式化を行ってきた。これに対し、複雑なシステムにおいては、変量それぞれの運動方程式を立てておき、それらの関係（拘束条件）を連立する形で表現する方が見通しが良くなることがある（もちろん、物理的な意味は同じ）。ここでは、このような**拘束条件付き運動方程式**による冗長な表現と、これまでの運動方程式の関係について、例を元に考えよう。

いま、図１に示すように、２つの質点を長さ ℓ の棒（大きさも重さもない）で連結した物体を考えよう。この図の y 軸負の方向には重力が働いていて、質点はどちらも質量 m を持つ。変量として、質点１、２の座標をそれぞれ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ と置く。２つの質点を結ぶ棒は、それぞれの質点が独立に運動することを制限しているので、**拘束**であると考えられる。

もし、質点が拘束と無関係であるとすると、両者にかかっている力は重力のみであるから、(197) という運動方程式を立てることができる。

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_1 &= 0 && (197)\\
m\ddot{y}_1 &= -mg\\
m\ddot{x}_2 &= 0\\
m\ddot{y}_2 &= -mg
\end{aligned}
$$

つまり、変量をベクトルにして整理すると、(198) となる。

$$\begin{bmatrix} m & & & \\ & m & & \\ & & m & \\ & & & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} = 0 \tag{198}$$

一方で、棒が発生させる拘束は、「２点間の距離が棒の長さに等しい」というものであるから、(199) と書ける。

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \ell^2 \tag{199}$$

ここで (199) を微分すると、(200) を得る。

$$\begin{bmatrix} 2(x_1 - x_2) \\ 2(y_1 - y_2) \\ -2(x_1 - x_2) \\ -2(y_1 - y_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{200}$$

さて、(200) は「変量の微分となにかを掛けるとゼロ」ということを表している。実は、これが拘束に関する仮想仕事の原理を表している。拘束であるので、変量についての仕事はゼロ、ということである。つまり、(200) の第１項は、位置と力のハイブリッド制御におけるヤコビアンの転置に相当するものになっている。

このことから、ある実数 λ を置くと、それを変量に作用する等価力への変換と対応づけることができ、拘束条件による「力」を含めた運動方程式を (201) と書き表すことができる。

$$\begin{bmatrix} m & & & \\ & m & & \\ & & m & \\ & & & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_2) \\ 2(y_1 - y_2) \\ -2(x_1 - x_2) \\ -2(y_1 - y_2) \end{bmatrix} \lambda \tag{201}$$

実際に λ の値は、(201) を変形した (202) と (200) を再度微分した (203) を連立することで、(204) のように求まる。これが拘束条件付運動方程式で、冗長な形となっている。

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \\ g \end{bmatrix} - \frac{2}{m} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ -(x_1 - x_2) \\ -(y_1 - y_2) \end{bmatrix} \lambda \tag{202}$$

$$\begin{bmatrix} 2(x_1 - x_2) \\ 2(y_1 - y_2) \\ -2(x_1 - x_2) \\ -2(y_1 - y_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = -2(\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2 - \dot{y}_2^2) \tag{203}$$

$$\lambda = \frac{m}{4\ell^2}(\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2 - \dot{y}_2^2) \tag{204}$$

さて、この方程式は、あくまで独立な変量とそれらの拘束条件という形で定式化されたものだが、ここで（我々が普通に考えるような）大域的な変数を導入してみよう。２つの質点を結ぶ棒の、世界座標系に対する角度を θ として導入

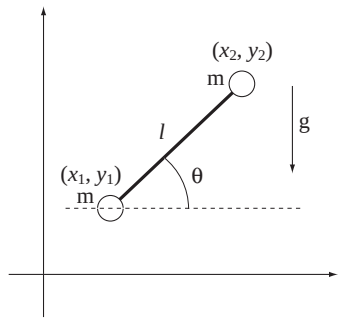

図 1: 棒で連結された 2 質点

する。これにより、各変量の間の関係が (205) のように定まる。

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \ell\cos\theta \\ y_2 &= y_1 + \ell\sin\theta \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 - \ell\sin\dot{\theta} \\ \dot{y}_2 &= \dot{y}_1 + \ell\cos\dot{\theta} \end{aligned} \tag{205}$$

先の (198) と同様に整理すれば (206) である。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 1 & & & -\ell\sin\theta \\ & 1 & & \ell\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{206}$$

これを用いて (206) を座標変換（変数変換）すると、(206) 右辺第一項を J と置けば

$$J^T m J \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + J^T m \dot{J} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + J^T m \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = -J^T \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_2) \\ 2(y_1 - y_2) \\ -2(x_1 - x_2) \\ -2(y_1 - y_2) \end{bmatrix} \lambda \tag{207}$$

を得ることから、(208) と整理できる。

$$m \begin{bmatrix} 2 & & -\ell\sin\theta \\ & 2 & \ell\cos\theta \\ -\ell\sin\theta & \ell\cos\theta & \ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} -\ell\cos\theta\dot{\theta} \\ -\ell\sin\theta\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2mg \\ \ell mg\cos\theta \end{bmatrix} = 0 \tag{208}$$

さらに、棒の重心を $(x_g,\, y_g)$ と置けば、$x_1 = x_g - \frac{1}{2}cos\theta$、$y_1 = y_g - \frac{1}{2}\sin\theta$ であるから、(208) を (209) に変換することができる。

$$m \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & \ell^2/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_g \\ \ddot{y}_g \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2mg \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{209}$$

この式は既に冗長ではなく、我々が普通に重心回りの運動方程式として考えるものと同一になっている。