ロボット工学第二２００４　補遺

倉林大輔

10　冗長マニピュレータの制御

10.1　冗長マニピュレータとは

与えられた作業を行うための最低限必要な自由度より大きい自由度を持つマニピュレータを冗長マニピュレータと呼ぶ。３次元空間においてマニピュレータの手先を考えると、その自由度は６であるので、６自由度を越える自由度を持つマニピュレータが一般に冗長マニピュレータと呼ばれる。人間の腕は超冗長マニピュレータである。

冗長性は、障害物を回避しながら物体を操作したり、特異姿勢を避けたりするのに有効である。

冗長マニピュレータでは、手先にある位置・姿勢をとらせるときの関節角が一意に決まらない(特異姿勢を除く)。与えられた作業よりも自由度が大きいので、複数のタスクに優先順位をつけておき、優先度の高いタスクから順に実現していく、という制御戦略をとることにする。たとえば、手先を物体表面に沿って動かす→腕で障害物を避ける→関節間でトルクの平均化をする、といった具合である。

マニピュレータの自由度が多ければ（あるいは要求タスクの必要自由度数が少なければ)、それだけ多くのタスクを組み込むことができる。また、サブタスクはベクトル変数によって目標軌道として表現する場合と、ある評価関数を設定する場合の２つが考えられる。ここでは、簡単のために

- サブタスク２つ
- 第１サブタスクは目標軌道で与えられる

という場合を取り上げて考えてみよう。

設定

マニピュレータ n 自由度、$\boldsymbol{q} = [q_1,\, q_2,\, \cdots,\, q_n]^T$

第１サブタスク m_1 次元の作業変数（ベクトル）$\boldsymbol{y}_1$ に対する目標軌道 $\boldsymbol{y}_{1d}(t)$（$0 \le t \le t_f$)。ただし、$\boldsymbol{y}_1 = f_1(\boldsymbol{q})$。

第２サブタスク (i) m_2 次元目標軌道 $\boldsymbol{y}_{2d}(t)$

第２サブタスク (ii) 評価関数 $p = V(\boldsymbol{q})$

第１サブタスク $\boldsymbol{y}_1(t) = \boldsymbol{y}_{1d}(t)$ をできるだけ達成し、余力で第２サブタスクをできるだけ実行するような関節速度を求めることにする。

10.2　制御速度算出

さて、$\boldsymbol{y}_1 = f_1(\boldsymbol{q})$ を微分して (1) を得る（本章では、ヤコビアン $J(\boldsymbol{q})$ の引数表示を省略する)。

$$\dot{\boldsymbol{y}}_1 = J_1 \dot{\boldsymbol{q}} \tag{1}$$

このとき、$||\dot{\boldsymbol{y}}_{1d} - \dot{\boldsymbol{y}}_1||$ を最小にする $\dot{\boldsymbol{q}}_d$ は一意に決まらず、(2) として与えられる。$\boldsymbol{k}_1$ は任意の n 次元定数ベクトルである。

$$\dot{\boldsymbol{q}}_d = J_1^+ \dot{\boldsymbol{y}}_{1d} + \left(I - J_1^+ J_1\right) \boldsymbol{k}_1 \tag{2}$$

なお、マニピュレータが冗長でなければ $\dot{\boldsymbol{q}}_d = J_1^{-1} \dot{\boldsymbol{y}}_{1d}$ となるはずだから、(2) の第 2 項は余っている自由度を表している。

I　第 2 サブタスクが目標軌道のとき

第 2 サブタスクが (3) と表されているとき、(4) の関係が成り立っている。

$$\boldsymbol{y}_2 = f_2(\boldsymbol{q}) \tag{3}$$

$$\dot{\boldsymbol{y}}_2 = J_2 \dot{\boldsymbol{q}} \tag{4}$$

目標軌道を $\boldsymbol{y}_{2d}$ としたとき、$\dot{\boldsymbol{q}}_d$ において $\dot{\boldsymbol{y}}_2 = \dot{\boldsymbol{y}}_{2d}$ が達成されることになるので、(4) より $\dot{\boldsymbol{y}}_{2d} = J_2 \dot{\boldsymbol{q}}_d$ となるはずである。第 1 サブタスクにより (2) の関係が成り立っているので、(4) の $\dot{\boldsymbol{q}}$ に (2) の $\dot{\boldsymbol{q}}_d$ を代入すると、(5) を得る。

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{y}}_{2d} &= J_2 J_1^+ \dot{\boldsymbol{y}}_{1d} + J_2 \left(I - J_1^+ J_1\right) \boldsymbol{k}_1 \\ \rightarrow\ \dot{\boldsymbol{y}}_{2d} - J_2 J_1^+ \dot{\boldsymbol{y}}_{1d} &= J_2 \left(I - J_1^+ J_1\right) \boldsymbol{k}_1 \end{aligned} \tag{5}$$

ここで $\hat{J}_2 = J_2 \left(I - J_1^+ J_1\right)$ とおけば、(5) を (6) と変形できる。ここで $\boldsymbol{k}_2$ は n 次元任意定数ベクトルである。

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{y}}_{2d} - J_2 J_1^+ \dot{\boldsymbol{y}}_{1d} &= \hat{J}_2 \boldsymbol{k}_1 \\ \rightarrow\ \boldsymbol{k}_1 &= \hat{J}_2^+ \left(\dot{\boldsymbol{y}}_{2d} - J_2 J_1^+ \dot{\boldsymbol{y}}_{1d}\right) + \left(I - \hat{J}_2^+ \hat{J}_2\right) \boldsymbol{k}_2 \end{aligned} \tag{6}$$

この $\boldsymbol{k}_1$ を (2) に代入することで、(7) の目標関節角速度を得る。

$$\dot{\boldsymbol{q}}_d = J_1^+ \dot{\boldsymbol{y}}_{1d} + \left(I - J_1^+ J_1\right) \hat{J}_2^+ \left(\dot{\boldsymbol{y}}_{2d} - J_2 J_1^+ \dot{\boldsymbol{y}}_{1d}\right) + \left(I - J_1^+ J_1\right) \left(I - \hat{J}_2^+ \hat{J}_2\right) \boldsymbol{k}_2 \tag{7}$$

この $\dot{\boldsymbol{q}}_d$ は、まず $\boldsymbol{y}_{1d}$ を実現し、残った冗長性でできるだけ $\boldsymbol{y}_{2d}$ を実現しようとする目標関節角速度である。なお、$\left(I - J_1^+ J_1\right) \left(I - \hat{J}_2^+ \hat{J}_2\right)$ が 0 でなければ、まだ冗長性が残っているので、第 3 サブタスク以降も実現できる可能性がある。

もし、第 2 サブタスクが直接マニピュレータの姿勢を規定するもの、すなわち

$$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{q} \tag{8}$$

であったとすると、そのヤコビアンは明らかに

$$J_2 = I$$

である。このことから、

$$\hat{J}_2^+ = (I - J_1^+ J_1)^+ = (I - J_1^+ J_1) \tag{9}$$

となる[1]。これを (7) に代入すると (10) を得る。このとき、第 2 タスクはマニピュレータの全自由度を規定しているので、これ以上の冗長性は残らない。

$$\dot{\boldsymbol{q}}_d = J_1^+ \dot{\boldsymbol{y}}_{1d} + (I - J_1^+ J_1) \dot{\boldsymbol{y}}_{2d} \tag{10}$$

[1] $(I - J_1^+ J_1)(I - J_1^+ J_1) = I - 2J_1^+ J_1 + J_1^+ J_1 J_1^+ J_1 = I - 2J_1^+ J_1 + J_1^+ J_1 = I - J_1^+ J_1$ を得るので、$\hat{J}_2 = \hat{J}_2^+ = I - J_1^+ J_1$ とすると擬似逆行列の 4 条件を満たす。

図 1: 冗長性を利用した障害物回避動作

図 2: 冗長性を利用した特異姿勢回避動作

ところで、目標速度 $\dot{\boldsymbol{y}}_{2d}$ が達成されても、位置偏差は残る可能性がある。特に、第 2 サブタスクとして姿勢を規定した場合、第 1 サブタスクの達成のための姿勢と相容れないことが多々予想される。そこで、目標速度 $\dot{\boldsymbol{y}}_{2d}$ 自体に、位置の比例要素を入れ込んでしまうことが考えられる。すなわち、

$$\dot{\boldsymbol{y}}_{2d}^{*} = \dot{\boldsymbol{y}}_{2d} + H_2(\boldsymbol{y}_{2d} - \boldsymbol{y}_2) \tag{11}$$

とする。ここで H_2 は対角ゲイン行列である。

II　第 2 サブタスクが評価関数のとき

いま、マニュピレータの関節角の関数であるような評価関数 (12) を設定し、(2) の $\boldsymbol{k}_1$ について p をできるだけ大きくすることを考えよう。

$$p = V(\boldsymbol{q}) \tag{12}$$

ここで、$V(\boldsymbol{q})$ の $\boldsymbol{q}$ に関する微分を考え、(13) のように (2) へ導入することを考える。ここで k_p は正の定数とする。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}_1 &= k_p \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\xi} &= [\xi_1,\, \xi_2,\, \cdots,\, \xi_n]^T \\ \xi_i &= \frac{\partial V(\boldsymbol{q})}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{13}$$

このとき、(2) は

$$\dot{\boldsymbol{q}}_d = J_1^{+} \dot{\boldsymbol{y}}_{1d} + \left(I - J_1^{+} J_1\right) \boldsymbol{\xi} k_p$$

であるので、$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_d$ の状態では、

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \dot{V}(\boldsymbol{q})\Big|_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_d} \\ &= \frac{\partial V(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \dot{\boldsymbol{q}}\Big|_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_d} \\ &= \boldsymbol{\xi}^T \dot{\boldsymbol{q}}_d \\ &= \boldsymbol{\xi}^T J_1^{+} \dot{\boldsymbol{y}}_{1d} + \boldsymbol{\xi}^T \left(I - J_1^{+} J_1\right) \boldsymbol{\xi} k_p \end{aligned} \tag{14}$$

が得られる。(14) の右辺第 2 項は 2 次形式になっており、$\left(I - J_1^{+} J_1\right)$ は非負定なので、k_p が評価関数を大きくする方向に働くことが分かる。以上から、p を速やかに大きくし、なおかつ $\dot{\boldsymbol{q}}_d$ を過大にしない k_p を選んで (13) を適用すれば、第 1 タスク達成と併せて評価関数の最大化を行うような目標関節角速度が算出できる。