

ロボット工学第二 2004 補遺

倉林大輔

9 可操作度

9.1 可操作性楕円体

可操作性とは、あるマニピレータのアーム先端の手先の位置や姿勢を、どの程度自由に操作できるのか、を表す指標である。

いま、 n 自由度マニピレータの一般化座標を q 、手先の位置・姿勢を r とすると、

$$\begin{cases} r = f(q) \\ v = J_v(q)\dot{q} \end{cases} \quad (1)$$

と書ける。ここで J_v は $f(q)$ の偏微係数行列 (J_r と書く) ではなく、等価回転軸を用いた姿勢変化成分を持つヤコビアンである。なお、手先の位置のみを考え、回転方向が不変であるなら $J_v = J_r$ としても以下の議論は同じである。以下、 J_v を単に J と書く。

さて、 $\dot{q}$ について、そのユークリッドノルムを $\|\dot{q}\| = (\dot{q}_1^2 + \dots + \dot{q}_n^2)^{\frac{1}{2}}$ としよう。いま、 $\|\dot{q}\| \leq 1$ を満足する $\dot{q}$ を用いて実現しうる全ての v の集合を考えると、これは m 次元ユークリッド空間の楕円体となる。この楕円体を可操作性楕円体と呼び、

$$\begin{cases} \text{主軸半径の長い方向} \rightarrow \text{速度を出しやすい} \\ \text{主軸半径の短い方向} \rightarrow \text{速度を出にくい} \end{cases}$$

ということを意味している。また、楕円体が球に近ければ、あらゆる方向に満遍なく手先を動かせることになる。

可操作性楕円体は、

$$v^T (J^+)^T J^+ v \leq 1 \quad \text{ただし } v \in R(J) \text{ (} J \text{ の値域)} \quad (2)$$

で表される。

証明

$v = J(q)\dot{q}$ の解 (あるいは $\|J(q)\dot{q} - v\|$ を最小化する解) は、

$$\dot{q} = J^+ v + (I - J^+ J)k \quad \text{ただし } k \text{ は任意定数ベクトル}$$

で与えられる。むしろ、 $J^+ = J^{-1}$ ならば $\dot{q} = J^{-1}v$ である。

擬似逆行列の性質、 $A^+ A A^+ = A^+$ 、 $(A^+ A)^T = A^+ A$ より、 $(I - J^+ J)^T J^+ = 0$ であることから、

$$\begin{aligned} \|\dot{q}\|^2 &= \dot{q}^T \dot{q} \\ &= v^T (J^+)^T J^+ v + 2k^T (I - J^+ J)^T J^+ v + k^T (I - J^+ J)^T (I - J^+ J)k \\ &= v^T (J^+)^T J^+ v + k^T (I - J^+ J)^T (I - J^+ J)k \\ &\geq v^T (J^+)^T J^+ v \end{aligned}$$

である。よって、 $\|\dot{q}\| \leq 1$ ならば $v^T (J^+)^T J^+ v \leq 1$ である。また、 $v = J(q)\dot{q}$ なので、 $\dot{q}$ によって実現される v は $v \in R(J)$ を明らかに満たす。

逆にいま、

$$\begin{cases} v^T (J^+)^T J^+ v \leq 1 \\ v \in R(J) \end{cases}$$

を満たす任意の v を 1 つ選び、 v^* と書くことにする。 $v^* \in R(J)$ なので、 $v^* = Jz$ となる適当な $z (n \times 1)$ が存在する。そこで、 $\dot{q}^* = J^+ v^*$ とおくと、この $\dot{q}^*$ について、

$$J\dot{q}^* = J J^+ v^* = J J^+ J z = J z = v^*$$

である。また、 $\|\dot{q}\|^2 = v^{*T} (J^+)^T J^+ v^*$ より、

$$v^{*T} (J^+)^T J^+ v^* \leq 1 \rightarrow \|\dot{q}\| \leq 1$$

が成立する。■

なお、マニピレータが特異姿勢にない状態、つまり $\text{rank } J = m$ なる q については、当然 $v \in R(J)$ なので、

$$v^T (J^+)^T J^+ v \leq 1$$

のみでよい。

9.2 可操作度

ヤコビアン J を特異値分解することで、可操作性楕円体の主軸を求めることができる。前出のように、 $J = U \Sigma V^T$ と分解できる。ここで U, V はそれぞれ $m \times m, n \times n$ の直交行列であり、

$$\Sigma = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_m & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right]$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$$

となる。 σ_i は J の特異値であり、 $J^T J$ の固有値の平方根を大きいものから m 個とったものである。

ここで、 U の第 i 列ベクトルを u_i と書くことにすると、可操作性楕円体の主軸は $\sigma_1 u_1, \sigma_2 u_2, \dots, \sigma_m u_m$ になっている。

可操作性楕円体から誘導される操作能力の目安として、楕円体の体積 $c_m w$ が用いられる。この算出は (3) の通りである。

$$\begin{cases} w = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m \\ c_m = \begin{cases} \frac{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (m-2)m} & (m \text{ が偶数}) \\ \frac{2(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (m-2)m} & (m \text{ が奇数}) \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

楕円体の体積において、 c_m は m でのみ決まってしまうので、事実上 w で体積が決まっている。そこで、 w を姿勢 q における可操作度と呼び、評価の指標とする。

w には以下のような性質がある。

- $w = \sqrt{\det(J(q)J^T(q))}$
- $m = n$ のとき (冗長でないとき) $w = |\det(J(q))|$
- $w \geq 0$ であり、 $w = 0$ となるのは $\text{rank } J(q) < m$ のとき、つまり特異姿勢にあるときのみ。

(例)

図 1(a) の 2 関節アームを考えると、手先を $r = [x, y]^T$ として

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \end{bmatrix}$$

であるから、 $w = |\det(J)| = l_1 l_2 |S_2|$ である。このことから、 $\theta_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ のとき、アームは最適姿勢（操作性最高）である。また、アーム全長 $l_1 + l_2$ が一定なら、 $l_1 = l_2$ のときに可操作性が最大となる。可操作性楕円体を図 1(b) に示す。

図 1: 可操作性楕円体の例

9.3 操作力楕円体

可操作度と同様に、どれくらい自由な方向へ力を加えることができるかを評価したい。その評価指標が操作力楕円体である。

いま、アームが特異姿勢にない ($\text{rank } J(q) = m$) であるとする。手先が静止した状態で物体に加える力を、 v に対応する m 次元ベクトル f と表す。 f に等価な関節駆動トルクを τ とすると、仮想仕事の原理より

$$\tau = J^T(q)f$$

である。ここで、 $\|\tau\| \leq 1$ を満たす τ を用いて実現できる全ての f の集合は、 m 次元ユークリッド空間の楕円体になり、(4) で表される。

$$f^T J(q) J(q)^T f \leq 1 \quad (4)$$

これを操作力楕円体と呼び、体積は $\frac{c_m}{w}$ である。また、操作力楕円体の主軸は $\frac{u_1}{\sigma_1}, \frac{u_2}{\sigma_2}, \dots, \frac{u_m}{\sigma_m}$ となる。このことから、

$$\begin{cases} \text{操作性の良い方向} & : \text{小さい力しか加えられない} \\ \text{操作性の悪い方向} & : \text{大きい力が加えられる} \end{cases}$$

という関係にあることがわかる。図 1 のマニピュレータについて、操作力楕円体を調べたものを図 2 に示す。

図 2: 操作力楕円体の例

9.4 動的可操作度

マニピレータの動的性質を考慮に入れた、可操作度を考えよう。マニピレータを次のように仮定する。

$$M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + g(q) = \tau \quad (5)$$

$$r = f(q) \quad (6)$$

$$v = J(q)\dot{q} \quad (7)$$

(7) を微分すると、

$$\dot{v} = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q} \quad (8)$$

を得る。ここで、 $\dot{J}(q)\dot{q} = a_r(q, \dot{q})$ と書くことにしよう。この a_r は、

$$\begin{aligned} a_r &= JJ^+ a_r + (I - JJ^+) a_r \\ &= JM^{-1}MJ a_r + (I - JJ^+) a_r \end{aligned} \quad (9)$$

と変形できる。すると、

$$\ddot{q} = M^{-1}(\tau - h(q, \dot{q}) - g(q)) \quad (10)$$

であるから、(8) に (9) と (10) を代入すれば、

$$\dot{v} - (I - JJ^+) a_r = JM^{-1}(\tau - h(q, \dot{q}) - g(q) + MJ^+ a_r) \quad (11)$$

である。ここで、

$$\begin{cases} \hat{\tau} &= \tau - h(q, \dot{q}) - g(q) + MJ^+ a_r \\ \hat{v} &= \dot{v} - (I - JJ^+) a_r \end{cases}$$

と置けば、(11) は

$$\dot{\hat{v}} = JM^{-1}\hat{\tau} \quad (12)$$

となる。

なお (9) は、 a_r (手先加速度の一部) を関節駆動力で出せる部分とそうでない部分に分けていることに相当する。また、アームが特異姿勢にないときは、 $I - JJ^+ = 0$ なので、 $\dot{v} = \dot{v}$ である。

さて、(12) について、 $\hat{\tau}$ に課されたある制約条件の下、手先の加速度 $\dot{\hat{v}}$ を自由に変えることのできる度合いを評価しよう。

$\|\hat{\tau}\| \leq 1$ を満足する $\hat{\tau}$ で実現される手先加速度 $\dot{\hat{v}}$ の全ての集合は、

$$\dot{\hat{v}}^T (J(M^T M)^{-1} J^T)^+ \dot{\hat{v}} \leq 1 \quad \dot{\hat{v}} \in R(J) \quad (13)$$

で表される m 次元楕円体となる。これを動的可操作性楕円体と呼び、DME(Dynamic Manipulability Ellipsoid) と略されることがある。

可操作度における J に相当する JM^{-1} の特異値分解が $JM^{-1} = U_d \Sigma_d V_d^T$ と書け、 JM^{-1} の特異値が $\sigma_{d1}, \dots, \sigma_{dm}$ と書けるならば、DME の体積は $c_m w_d = c_m \prod_{i=1}^m \sigma_{di}$ となる。この w_d を動的可操作度と呼ぶ。

動的可操作度は可操作度とほぼ同じ以下のような性質を持つ。

- $w_d = \sqrt{\det(J(M^T M)^{-1} J^T)}$
- $m = n$ ならば $w_d = |\det J|/|\det M|$
- $w_d \geq 0$ であり、 $w_d = 0$ となるのは $\text{rank } J \neq m$ のときのみ。

(例)

図 1 の 2 リンクマニピレータについて、動的可操作度を求める。 $r[x, y]^T$ とおくと、

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 S_{12} & l_2 C_{12} \end{bmatrix}$$

また、

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} M_{11} &= \hat{I}_1 + \hat{I}_2^* + m_1 l_{g1}^2 + m_2^* (l_1^2 + l_{g2}^{*2} + 2l_1 l_{g2}^* C_2) \\ M_{12} &= \hat{I}_2^* + m_2^* (l_{g2}^{*2} + l_1 l_{g2}^* C_2) \\ M_{22} &= \hat{I}_2^* + m_2^* l_{g2}^{*2} \end{cases}$$

ここで、* は手先と負荷もリンク 2 の一部とみなしたもので、

$$\begin{cases} m_2^* &= m_2 + m_e \\ l_{g2}^* &= \frac{m_2 l_{g2} + m_e l_2}{m_2 + m_e} \\ \hat{I}_2^* &= \hat{I}_2 + m_2 (l_{g2}^* - l_{g2})^2 + \hat{I}_e + m_e (l_2 - l_{g2}^*)^2 \end{cases}$$

このとき、 $m = n = 2$ であるので、

$$w_d = \frac{l_1 l_2 |S_2|}{(\hat{I}_1 + m_1 l_{g1}^2)(\hat{I}_2^* + m_2^* l_{g2}^{*2}) + \hat{I}_2^* m_2^* l_1^2 + m_2^{*2} l_{g2}^{*2} l_1^2 S_2^2}$$

を得る。