ロボット工学第二２００４　補遺
倉林大輔

7　リアプノフの安定理論

7.1　リアプノフの意味での安定

運動方程式

$$M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + g(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

は非線形項を含むので、安定性を判別する指標が必要となる。その代表的なものが、リアプノフ (Lyapunov) の安定性理論である。

いま、$\boldsymbol{x}$ を状態変数ベクトルとして、

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \quad \text{ただし、平衡状態}\boldsymbol{x}_e\text{で } f(\boldsymbol{x}_e) = \boldsymbol{0}$$

という非線形システムを考える。このシステムで、$\boldsymbol{x}_e$ について

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, ||\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_e|| < \delta \rightarrow ||\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_e|| < \varepsilon \tag{147}$$

が成り立つとき、このシステムは**リアプノフの意味で安定**という。ここで、システムがリアプノフの意味で安定であっても、$\boldsymbol{x}(t)$ が時間の経過とともに $\boldsymbol{x}_e$ に収束するということを意味しているのではない点に注意が必要である。

また、システムがリアプノフの意味で安定で、かつ

$$\exists \delta > 0, ||\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_e|| < \delta \rightarrow \lim_{t \to \infty} ||\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_e|| = 0 \tag{148}$$

のとき、平衡点 $\boldsymbol{x}_e$ が**局所漸近安定**である、という。局所漸近安定であるとは、時間が十分経過すれば、システムの状態が $\boldsymbol{x}_e$ に収束するという意味であり、収束スピードについては保障されていない。ただし、時不変線形システムであれば、漸近安定＝指数安定である。

さらに、局所漸近安定で、かつ

$$\exists \alpha > 0, c > 0 \rightarrow ||\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_e|| \leq c e^{-\alpha t} ||\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_e|| \tag{149}$$

が成り立つとき、**局所指数安定**である、という。

この３種の安定性が、全ての初期値 $\boldsymbol{x}_0$ について成り立つとき、それぞれ大域的安定、大域的漸近安定、大域的指数安定、という。

7.2　リアプノフの安定定理（漸近安定性の判別）

$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})$, $f(\boldsymbol{x}_e) = \boldsymbol{0}$ のシステムにおいて、次の条件を満たすスカラ関数 $V(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}_e$ の近傍で存在するとき、$\boldsymbol{x}_e$ は局所漸近安定である。

条件	$V(\boldsymbol{x}) > 0, \quad V(\boldsymbol{x}_e) = 0$
	$V(\boldsymbol{x})$ は時間で連続微分可で、$\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0 \ (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_e)$

このような $V(\boldsymbol{x})$ を**リアプノフ関数**という。リアプノフ関数の一般的な求め方はなく、物理的なエネルギーに関するものが使われることが多い。

<例>

$$\text{システム}\quad \dot{x} = -k\sin(x), \quad k > 0$$

システムの平衡点の１つは、$x_e = 0$。これが漸近安定かどうか判別する。

リアプノフ関数の候補として、

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

とおくと、明らかに $V(x) > 0$（$-\pi < x < \pi,\ x \neq 0$）である。また、

$$\dot{V}(x) = x\dot{x} = -kx\sin(x) < 0 \quad (-\pi < x < \pi,\ x \neq 0)$$

である。よって、$V(x)$ はリアプノフ関数であり、このシステムは $x_e = 0$ の近傍で漸近安定である。
■

7.3　ラ・サールの安定定理

いま、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

というごく普通のバネ・マス・ダンパ系を考えよう。この２次系は、特性方程式 $ms^2 + cs + k = 0$ の根を極に持つ。ラウス・フルビッツ (Routh Hurwitz) の安定判別により、係数 m, c, k が全て正なら、このシステムは安定である。このことは、普通の物理現象を考えても当然である。

これにリアプノフの安定定理を適用するとどうだろうか。

システムの力学エネルギを、リアプノフ関数 $V(\boldsymbol{x})$ の候補としてみよう。

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

ただし、システムの状態変数は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。$V(\boldsymbol{x}) > 0$ であることは明らか。$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ について考えると、

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}m\ddot{x} + kx\dot{x} \\ &= \dot{x}(-c\dot{x} - kx) + kx\dot{x} \\ &= -c\dot{x}^2 \leq 0 \end{aligned}$$

である。つまり、$\boldsymbol{x} = [x, 0]^T$ については、常に $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0$ となるため、$\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0\ (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_e)$ を満たさない。

このように、物理現象や他の安定性定理から明らかに安定であるシステムが、リアプノフの意味で安定でない、と判別されてしまうことがある。そこで、リアプノフの定理を拡張した**ラ・サール (La Salle) の定理**が提案された。

ラ・サールの定理

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}), \quad f(\boldsymbol{x}_e) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

のシステムで、以下の条件を満たすスカラ関数 $V(x)$ が x_e の近傍で存在すれば、x_e は局所漸近安定である。

条件	1	$V(\boldsymbol{x}) > 0, \quad V(\boldsymbol{x}_e) = \boldsymbol{0}$
	2	$V(\boldsymbol{x})$ は時間で連続微分可能で、$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0 \quad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_e)$
	3	$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ を仮定したとき、微分方程式の解が $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_e$ のみ

これを先ほどのバネ・マス・ダンパ系に当てはめてみる。条件 1 と 2 は既に満たしているので、条件 3 について考察する。$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -c\dot{\boldsymbol{x}}^2 \equiv 0$ を仮定すると、$\dot{x} \equiv 0$ であり、当然 $\ddot{x} \equiv 0$ となる。これを $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ に代入すれば、$kx = 0$ を得る。$k > 0$ であるので、$x = 0$ であり、これは x_e に一致する。つまり、ラ・サールの定理の条件を満たしているので、このシステムにおいて x_e が漸近安定であるといえる。

例題：重力補償付き PD 制御

重力補償付き PD 制御

ダイナミクスを考慮しないで運動方程式 (150) のマニュピレータを目標状態 $\boldsymbol{q}_d$ に整定させる制御を考えよう。ただし、$v(\dot{\boldsymbol{q}})$ は粘性抵抗、$g(\boldsymbol{q})$ は重力項である。

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + v(\dot{\boldsymbol{q}}) + g(\boldsymbol{q}) \tag{150}$$

さて、いま粘性抵抗が $v(\dot{\boldsymbol{q}}) = K_U\dot{\boldsymbol{q}}$ という形で書けるとする。このとき (151) というシンプルなフィードバックをかけると、目標状態 $\boldsymbol{q}_d$ を実現することができる。K_V, K_P は対角正定なゲイン行列である。このフィードバックは、マニピュレータの動特性をほとんど無視しており、唯一重力項が考慮されているだけなのに、マニピュレータを目標状態に静定することができる。そのことをラ・サールの定理で証明しよう。

$$\boldsymbol{\tau}_m = -K_V\dot{\boldsymbol{q}} + K_P(\boldsymbol{q}_d - \boldsymbol{q}) + g(\boldsymbol{q}) \tag{151}$$

ラ・サールの定理による漸近安定性の証明

(150) に (151) を代入する（フィードバックをかける）と (152) を得る。

$$M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + (K_U + K_V)\,\dot{\boldsymbol{q}} + h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + K_P(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_d) = \boldsymbol{0} \tag{152}$$

リアプノフ関数の候補として (153) を用意すると、明らかに $V(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) > 0$ であり、かつ $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_d, \dot{\boldsymbol{q}} = 0$ でのみ $V(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0$ となる。

$$V(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T M(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_d)^T K_P(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_d) \tag{153}$$

これを微分すると (154) を得るが、(152) より $\ddot{\boldsymbol{q}}$ の項を消去すると (155) となる。

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= \dot{\boldsymbol{q}}^T \left\{ M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\dot{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \right\} + \dot{\boldsymbol{q}}^T K_P(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_d) && (154) \\ &= -\dot{\boldsymbol{q}}^T (K_U + K_V)\,\dot{\boldsymbol{q}} + \dot{\boldsymbol{q}}^T \left[\frac{1}{2}\dot{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} - h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \right] && (155) \end{aligned}$$

(155) において第 1 項は明らかに負または 0 であるから、第 2 項の値が問題となる。ここで、運動方程式導出の関係から、(156) が成り立っている。

$$h(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \dot{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} - col\left[\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T\frac{\partial M(\boldsymbol{q})}{\partial q_i}\dot{\boldsymbol{q}}\right] \tag{156}$$

このことから、(155) 第 2 項は (157) となる。

$$\begin{aligned} \text{第 2 項} &= \dot{\boldsymbol{q}}^T\left\{col\left[\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T\frac{\partial M(\boldsymbol{q})}{\partial q_i}\dot{\boldsymbol{q}}\right] - \frac{1}{2}\dot{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\dot{\boldsymbol{q}}^T col\left[\dot{\boldsymbol{q}}^T\frac{\partial M(\boldsymbol{q})}{\partial q_i}\dot{\boldsymbol{q}}\right] - \dot{\boldsymbol{q}}^T\dot{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\right\} \end{aligned} \tag{157}$$

さて、(158) のように $M(\boldsymbol{q})$ の q_i による微分を縦ベクトル $m_{1i}, m_{2i}, \cdots$ の並びで書くことにしよう。

$$\frac{\partial M(\boldsymbol{q})}{\partial q_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_{11}}{\partial q_i} & \frac{\partial M_{12}}{\partial q_i} & \cdots \\ \frac{\partial M_{21}}{\partial q_i} & \frac{\partial M_{22}}{\partial q_i} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix} = [m_{1i},\ m_{2i},\ \cdots] \tag{158}$$

ここで $col[\cdot]$ の i 要素について考えると、

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{q}}^T\frac{\partial M(\boldsymbol{q})}{\partial q_i}\dot{\boldsymbol{q}} &= \left[\dot{\boldsymbol{q}}^T m_{1i},\ \dot{\boldsymbol{q}}^T m_{2i},\ \cdots\right]\dot{\boldsymbol{q}} \\ &= \dot{\boldsymbol{q}}^T m_{1i}\dot{q}_1 + \dot{\boldsymbol{q}}^T m_{2i}\dot{q}_2 + \cdots \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{q}}^T col\left[\dot{\boldsymbol{q}}^T\frac{\partial M(\boldsymbol{q})}{\partial q_i}\dot{\boldsymbol{q}}\right] &= [\dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \cdots]\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}^T m_{11}\dot{q}_1 + \dot{\boldsymbol{q}}^T m_{21}\dot{q}_2 + \cdots \\ \dot{\boldsymbol{q}}^T m_{12}\dot{q}_1 + \dot{\boldsymbol{q}}^T m_{22}\dot{q}_2 + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix} \\ &= \dot{q}_1\dot{\boldsymbol{q}}^T m_{11}\dot{q}_1 + \dot{q}_1\dot{\boldsymbol{q}}^T m_{21}\dot{q}_2 + \cdots \\ &\quad + \dot{q}_2\dot{\boldsymbol{q}}^T m_{21}\dot{q}_1 + \dot{q}_2\dot{\boldsymbol{q}}^T m_{22}\dot{q}_2 + \cdots \\ &\quad + \cdots \\ &= \dot{\boldsymbol{q}}^T\{\dot{q}_1 m_{11}\dot{q}_1 + \dot{q}_1 m_{21}\dot{q}_2 + \cdots \\ &\quad + \dot{q}_2 m_{21}\dot{q}_1 + \dot{q}_2 m_{22}\dot{q}_2 + \cdots \\ &\quad + \cdots\} \\ &= \dot{\boldsymbol{q}}^T\begin{bmatrix} \dot{q}_1 m_{11} + \dot{q}_2 m_{12} + \cdots \\ \dot{q}_1 m_{21} + \dot{q}_2 m_{22} + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix}^T\dot{\boldsymbol{q}} \\ &= \dot{\boldsymbol{q}}^T\begin{bmatrix} \dot{q}_1\frac{\partial M_{11}}{\partial q_1} + \dot{q}_2\frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} + \cdots & \dot{q}_1\frac{\partial M_{12}}{\partial q_1} + \dot{q}_2\frac{\partial M_{12}}{\partial q_2} + \cdots & \cdots \\ \dot{q}_1\frac{\partial M_{21}}{\partial q_1} + \dot{q}_2\frac{\partial M_{21}}{\partial q_2} + \cdots & \dot{q}_1\frac{\partial M_{22}}{\partial q_1} + \dot{q}_2\frac{\partial M_{22}}{\partial q_2} + \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{q}} \\ &= \dot{\boldsymbol{q}}^T\dot{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \end{aligned}$$

よって、(155) の第 2 項は恒等的にゼロであり、$V(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \leq 0$ であることが分かった。

最後に、$V(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \equiv 0$ の場合を考えると、(155) より $\dot{\boldsymbol{q}} \equiv 0$ でなくてはいけない。この場合、当然 $\ddot{\boldsymbol{q}} \equiv 0$ である。これを (152) に代入すれば $h(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + K_p(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_d) = 0$ を得るが、(156) から明らかなように $h(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \equiv 0$ である。よって、$V(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \equiv 0$ となるのは $\boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{q}_d$ の場合に限られる。

以上から、ラ・サールの定理より $V(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ がリアプノフ関数であることが示された。よって、(151) のフィードバックにより、系は平衡点 $\boldsymbol{q}_d$ について漸近安定となっている。