ロボット工学第二２００４　補遺

倉林大輔

6　力と位置のハイブリッド制御

6.1　力と位置のハイブリッド制御

マニュピレータを使って、黒板に白墨で字を書くことを考えてみると、黒板と垂直な方向には力制御を行い、黒板と平行な方向には文字を書くための位置制御を行う、という２つのことを同時に行わなくてはならない。このように、ある方向には力制御を、残りの方向には位置制御を同時に行うことを、ここでは力と位置のハイブリッド制御と呼ぶことにする。

いま、図 1(a) のような平面２自由度アームを考える。アームの手先を対象物に垂直な方向には指定された力で押し付け、同時に面に沿う方向には指定された目標に沿って移動させたい。ここで、物体側、つまり拘束の条件を与えている側の座標系 Σ_c を**拘束座標系**と呼ぶ。図 1(a) の例では、Σ_c が $\{X_c, Y_c, \Theta_c\}$ の３軸からなるので、X_c を位置制御方向、Y_c を力制御方向と呼ぶ。手先に力センサがあって、手先にかかっている力（方向を逆に考えれば、手先が拘束におよぼしている力）$\boldsymbol{F}$ が分かるとする。このとき、目標となる軌道をとるためのトルクが $\boldsymbol{\tau}_P$ であるとすると、$\boldsymbol{F}$ と等価な力 $\boldsymbol{\tau}_F$ を加えることが必要となる。結果として、位置制御および力制御を実現する $\boldsymbol{\tau}_P, \boldsymbol{\tau}_F$ を計算し、これらの和 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_P + \boldsymbol{\tau}_F$ を各関節に印加すれば、目標とするハイブリッド制御が実現される。

なお、図 1(b) のように曲面に沿った動作を行わせる場合、Σ_c が動的に変化する、というモデルをとると表現できる。具体的には、手先に Σ_c の原点 O_c をとり、面に接する方向を X_c、垂直方向を Y_c とするのが良い。

6.2　拘束の表現

まず、図 2 のようにクランクをまわすという例から考えてみよう。このとき、ハンドはハンドルをしっかりにぎり、ハンドルはハンドル軸まわりに回転するとしよう。この系について、図のように、ハンドル軸上に O_c、ハンドル軸方向に Z_c、クランク軸から遠ざかる方向に X_c、右手系となるように Y_c をとり、Σ_c とする。

ハンドが変えられる（変位を与えられる）のは、Y_c 方向の並進と、Z_c 軸まわりの回転になる。一方、X_c と Z_c 軸の並進、X_c,Y_c 軸回りの回転には力を加えることができる。Σ_c 上での手先速度 ${}^c\boldsymbol{v}$、ハンドルに加える力 ${}^c\boldsymbol{f}$ を (1)(2) とすると、作業の拘束は (3) となる。これを**自然拘束**という。

$$
\begin{aligned}
{}^c\boldsymbol{v} &= [\,{}^cv_x,\, {}^cv_y,\, {}^cv_z,\, {}^c\omega_x,\, {}^c\omega_y,\, {}^c\omega_z\,]^T && (1)\\
{}^c\boldsymbol{f} &= [\,{}^cf_x,\, {}^cf_y,\, {}^cf_z,\, {}^cn_x,\, {}^cn_y,\, {}^cn_z\,]^T && (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
{}^cv_x = {}^cv_z = 0,\ {}^c\omega_x = {}^c\omega_y = 0 \\
{}^cf_y = 0,\ {}^cn_z = 0
\end{cases}
\tag{3}
$$

図 1: 拘束座標系

一方、クランクをまわすという作業は、Y_c 軸方向に与える並進速度が v_0、Z_c 軸回りに与える角速度が ω_0 であるときに (4) と書ける。これを**人工拘束**と呼ぶ。

$$\begin{cases} {}^c v_y = v_0,\ {}^c\omega_z = \omega_0 \\ {}^c f_x = {}^c f_z = 0,\ {}^c n_x = {}^c n_y = 0 \end{cases} \tag{4}$$

いま、マニュピレータの手先を $\boldsymbol{x}$ と書く。一般に、３次元空間での手先の自由度は６であるので、ここでもそのように仮定する。この手先が受ける m 個の位置的な拘束（先の例でいえば黒板を表す平面の方程式）を (5) で表すことにしよう。当然、拘束式の数は自由度以下でなくてはならない。また、(5) の式は全て独立であり、$\boldsymbol{x}$ について２階微分可能であると仮定する。

$$p_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (i = 1, 2 \cdots, m) \quad m \leq 6 \tag{5}$$

なお、先の黒板の例でもそうだが、一般的な物理現象では物体外部から表面まではマニュピレータが接近できるが、内部には侵入できない、というのが妥当だろう。そこで、

$$\begin{cases} \text{物体内部} & p_i(\boldsymbol{x}) > 0 \\ \text{外部} & p_i(\boldsymbol{x}) < 0 \end{cases}$$

と決めておく。

(5) を微分すると (6)、さらに微分すると (7) が得られる。なお、$p_i(\boldsymbol{x})$ が独立であれば E_F のランクは m である。

$$\begin{aligned} E_F \dot{\boldsymbol{x}} &= 0 \qquad (6) \\ E_F &= \begin{bmatrix} e_{6-(m-1)} \\ e_{6-(m-2)} \\ \vdots \\ e_6 \end{bmatrix} \\ e_{6-(m-i)} &= \frac{\partial p_i(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \\ E_F \ddot{\boldsymbol{x}} + \dot{E_F} \dot{\boldsymbol{x}} &= 0 \qquad (7) \end{aligned}$$

一方、手先が拘束を受けながら運動するときの軌道を表示するために、２階微分可能な $(6-m)$ 次元関数 (8) を考える。$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$ の各要素も互いに独立であるとする。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_p &= \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}) \qquad (8) \\ &= [s_1(\boldsymbol{x}),\ s_2(\boldsymbol{x}),\ \cdots,\ s_{6-m}(\boldsymbol{x})] \end{aligned}$$

(8) を微分すると (9)、さらに微分して (10) を得る。

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_p &= E_P \dot{\boldsymbol{x}} \qquad (9) \\ E_P &= \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdots \\ e_{6-m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

図 2: クランク回しにおける拘束座標系

$$
\begin{aligned}
e_j &= \frac{\partial s_j(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \\
\ddot{\boldsymbol{x}}_p &= E_P \ddot{\boldsymbol{x}} + \dot{E}_P \dot{\boldsymbol{x}}
\end{aligned} \tag{10}
$$

ここで

$$
E = \begin{bmatrix} E_P \\ E_F \end{bmatrix}
$$

と置いて整理すると、

$$
E\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_P \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E\ddot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}_P \\ 0 \end{bmatrix} - \dot{E}\dot{\boldsymbol{x}} \tag{11}
$$

である。

6.3 ハイブリッド制御

いま、手先から拘束に向かって $\boldsymbol{F}$ という m 次元ベクトルの力がかかっているとすると、その力に等価な関節トルク $\boldsymbol{\tau}_F$ は (12) となる。

$$
\boldsymbol{\tau}_F = J^T(\boldsymbol{q}) E_F^T \boldsymbol{F} \tag{12}
$$

さて、マニュピレータの運動方程式は、等価トルクがあるので

$$
\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_F = M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \hat{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{13}
$$

さらに、手先と関節角の関係から

$$
\ddot{\boldsymbol{q}} = J^{-1}(\boldsymbol{q}) \left(-\dot{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \ddot{\boldsymbol{x}} \right)
$$

であるので、

$$
\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{x}} - M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q})\dot{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \hat{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{\tau}_F \tag{14}
$$

これに (11) および $\dot{\boldsymbol{x}} = J(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$ の関係を代入すると (15) を得る。この式が、位置制御に関する運動方程式になっている。

$$
\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q}) \left(E^{-1} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}_P \\ 0 \end{bmatrix} - E^{-1}\dot{E}J(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} - \dot{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \right) + \hat{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{\tau}_F \tag{15}
$$

ここでいつものように、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \alpha \boldsymbol{u} + \beta \\
\alpha &= M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q})E^{-1} \\
\beta &= M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q}) \left(-\dot{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} - E^{-1}\dot{E}J(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \right) + \hat{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{\tau}_F
\end{aligned}
$$

と置くことにより、

$$
\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}_P \\ 0 \end{bmatrix}
$$

を得るので、$\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{v}, 0]^T$ によって $\ddot{\boldsymbol{x}}_P = \boldsymbol{v}$ を得る。後は $\boldsymbol{v}$ に望みのサーボを組めば良い。

一方、力出力に関しては、(12) で等価な関節力が与えられているので、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_F &= \alpha\boldsymbol{u}+\beta \\ \alpha &= J^T(\boldsymbol{q})E_F^T \\ \beta &= 0\end{aligned}$$

とすれば、$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{u}$ となる。一定の力 $\boldsymbol{F}_d$ をかけるのであれば、$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}_d$ とすれば良い。

最終的に、両者の和 $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}_P+\boldsymbol{\tau}_F$ を出力とすれば、目的とするハイブリッド制御が実現される。

6.4 例題

図 3 に示す、平面内を動く 2 自由度アームの手先を、ハッチングされた直方体について垂直な方向に一定の押し付け力をかけながら、面と並行な方向に指定された軌道で動かすことを考える。

物体は拘束を与えるので、物体上に拘束座標系 Σ_C をとる。物体表面に沿って X_C 軸を取れば、位置制御方向 X_C、力制御方向 Y_C と考えられる。

手先の拘束座標系における位置を $\boldsymbol{x}$、位置誤差・押し付け力誤差をそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_f$ とすると、これらは (16) と書ける。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_x &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}(\boldsymbol{x}_d-\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{e}_f &= \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}(\boldsymbol{f}_d-\boldsymbol{f})\end{aligned} \tag{16}$$

関節角（一般化座標）$\boldsymbol{q}$ に対する $\boldsymbol{x}$ のヤコビ行列 $J(\boldsymbol{q})$ が、扱う範囲内で正則であると仮定すると、$\ddot{\boldsymbol{q}}=J^{-1}(\boldsymbol{q})(\ddot{\boldsymbol{x}}-\dot{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}})$ であることから、マニピュレータの運動方程式は (17) と書ける。ここで $\boldsymbol{\tau}_F$ は押し付け力制御成分である。

$$M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q})(\ddot{\boldsymbol{x}}-\dot{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}})+\hat{h}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{\tau}_F=\boldsymbol{\tau} \tag{17}$$

押し付け力の目標との差異 $\boldsymbol{e}_f$ は、関節角空間では $\boldsymbol{\tau}_{Fe}=J(\boldsymbol{q})^T\boldsymbol{e}_f$ となる。力の微分は難しいので、積分制御による制御を考え、$\boldsymbol{\tau}_F$ を (18) のようにフィードバックする。

$$\boldsymbol{\tau}_F=K_i\int_0^t\boldsymbol{\tau}_{Fe}dt \tag{18}$$

また、位置誤差について (19) なるサーボを組むこととすると、(20) が実現されれば良い。

$$\ddot{\boldsymbol{e}_x}+K_v\dot{\boldsymbol{e}_x}+K_p\boldsymbol{e}_x=0 \tag{19}$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}}=\ddot{\boldsymbol{x}}_d+K_v\dot{\boldsymbol{e}_x}+K_p\boldsymbol{e}_x \tag{20}$$

最終的に、(17) に (18) と (20) を代入することにより、求めるハイブリッド制御の制御入力 $\boldsymbol{\tau}$ が得られる。

図 3: ハイブリッド制御対象