ロボット工学第二２００４　補遺

倉林大輔

5　インピーダンス制御

5.1　能動インピーダンス制御

制御によって望ましいコンプライアンス（柔らかさ　動特性）を模擬しようとする制御手法が能動インピーダンス制御である。

いま、単純なバネ・マス・ダンパ系に外力 F が作用しているシステム (1) を考えよう。ここで x は平衡位置からの変位、u は我々が決められる入力である。このシステムが、あたかも (2) の動特性を持つかのように振舞わせる制御を実現したい。

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = F + u \tag{1}$$

$$m_d\ddot{x} + d_d\dot{x} + k_d x = F \tag{2}$$

入力 u を (3) のようにモデルとサーボに分解すると、新たな入力 v に対して $\ddot{x} = v$ となる。

$$\begin{aligned} u &= \alpha v + \beta \\ \alpha &= m \\ \beta &= d\dot{x} + kx - F \end{aligned} \tag{3}$$

望ましいインピーダンス (2) は (4) と変形できるから、v で (4) の左辺を与えてやれば、望みの制御が実現できる。

$$\ddot{x} = -\frac{d_d}{m_d}\dot{x} - \frac{k_d}{m_d}x + \frac{F}{m_d} \tag{4}$$

以上を整理すれば、(5) の制御入力 u によって目的が達成される。

$$\begin{aligned} u &= m\left(-\frac{d_d}{m_d}\dot{x} - \frac{k_d}{m_d}x + \frac{F}{m_d}\right) + d\dot{x} + kx - F \\ &= \left(d - \frac{m}{m_d}d_d\right)\dot{x} + \left(k - \frac{m}{m_d}k_d\right)x + \left(\frac{m}{m_d} - 1\right)F \end{aligned} \tag{5}$$

もし、F が直接計測できないときは、(1) から (2) を引けば (6) を得る。この u を入力とすれば、目的の制御が達成される。この場合、制御入力の生成に加速度 $\ddot{x}$ を使う点に注意が必要である。

$$u = (m - m_d)\ddot{x} + (d - d_d)\dot{x} + (k - k_d)x \tag{6}$$

目標軌道があるとき

さらに、x について目標軌道があるとき、すなわち実現したい系が (7) である場合を考える。

$$m_d\ddot{x} + d_d(\dot{x} - \dot{x}_d) + k_d(x - x_d) = F \tag{7}$$

先の (4) と同様に、目的の系は (8) と変形されるので、制御入力は (9) となる。

$$\ddot{x} = -\frac{d_d}{m_d}(\dot{x} - \dot{x}_d) - \frac{k_d}{m_d}(x - x_d) + \frac{F}{m_d} \tag{8}$$

$$u = \left(d - \frac{m}{m_d} d_d\right)\dot{x} + \left(k - \frac{m}{m_d} k_d\right) x + \left(\frac{m}{m_d} - 1\right) F + \frac{m}{m_d}\left(\dot{x}_d + x_d\right) \tag{9}$$

またこの場合も、F を直接測定できない場合は、(1) から (7) を引くことで、(10) の制御入力を得る。

$$u = (m - m_d)\ddot{x} + (d - d_d)\dot{x} + (k - k_d)x + d_d\dot{x}_d + k_d x_d \tag{10}$$

固定物体との接触を考慮したパラメタ決定

環境中に固定された物体との接触がある場合を考える。いま、制御対象と物体との相互作用が (11) でモデル化されるとしよう。ここで x_e は $F = 0$ となる平衡点である。

$$d_e\dot{x} + k_e(x - x_e) = -F \tag{11}$$

むろん k_e, d_e は制御対象と物体の材質に依存するが、指によるなぞりのように柔らかい材質の場合は k_e が小さく、金属同士を溶接しようと接触させる場合には k_e が大きいという定性的な傾向がある。

するとこのとき、望ましいインピーダンスが (7) であれば、システム全体でのインピーダンスは (12) となる。

$$m_d\ddot{x} + (d_d + d_e)\dot{x} + (k_d + k_e)x = d_d\dot{x}_d + k_d x_d + k_e x_e \tag{12}$$

この場合、系の特性は左辺で決まり、

$$\begin{aligned} \omega_c &= \sqrt{\frac{k_d + k_e}{m_d}} \quad \text{固有角周波数} \\ \zeta &= \frac{d_d + d_e}{2\sqrt{m_d(k_d + k_e)}} \quad \text{減衰係数} \end{aligned}$$

であるので、接触時に望みの動作を行うように m_d, d_d, k_d を設計する。

なお、一般に k_e, d_e はあまり正確に分かっていない場合が多い。予想より k_e が大きく d_e が小さいと、減衰が小さすぎるので、d_d を大きめに決めることである程度問題を回避できる。また、m_d, k_d を小さくしておけば、物体に沿うような動きとなる。

5.2 マニピュレータのインピーダンス制御

いま、マニュピレータの手先座標を $\boldsymbol{x}$、手先に加わる外力ベクトルが $\boldsymbol{F}$ であるときに、望ましいインピーダンスを持たせるための制御を実現しよう。ここでの目的は、あたかも望ましい機械インピーダンスを持つ手先が理想的なアームに支えられて目標軌道を実現するかの動きをさせることである。

手先座標 $\boldsymbol{x}$ に対して、目標 $\boldsymbol{x}_d$ との誤差を $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x}$ と書くことにし、望ましい系を (13) とする。

$$M_d\ddot{\boldsymbol{x}} - D_d\dot{\boldsymbol{e}} - K_d\boldsymbol{e} = F \tag{13}$$

ここで $\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{x}$ に対する一般化力で、手先に環境から加わる力を表す。M_d, D_d, K_d は非負定対称行列で、それぞれ慣性行列、減衰係数行列、剛性行列である。

一方、マニュピレータの側からみると、運動方程式は (14) と書ける。

$$\begin{cases} M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \hat{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{\tau}_F + \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{q}), \quad \dot{\boldsymbol{x}} = J(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \end{cases} \tag{14}$$

ここで、$\boldsymbol{\tau}_F$ は関節にかかる $\boldsymbol{F}$ と等価なトルクであり、(15) と表される。

$$\boldsymbol{\tau}_F = J^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{F} \tag{15}$$

さて、望ましい系は手先空間で与えられているので、

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= J(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \\ \rightarrow \ddot{\boldsymbol{x}} &= J(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \dot{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \\ \rightarrow \ddot{\boldsymbol{q}} &= J^{-1}(\boldsymbol{q})\left(-\dot{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \ddot{\boldsymbol{x}}\right) \end{aligned}$$

より、(14) は (16) と変形できる。

$$M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{x}} - M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q})\dot{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \hat{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - J^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\tau} \tag{16}$$

ここで、制御入力 $\boldsymbol{u}$ を考え、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \alpha\boldsymbol{u} + \beta \\ \alpha &= M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q}) \\ \beta &= -M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q})\dot{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \hat{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - J^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{F} \end{aligned} \tag{17}$$

とすれば、$\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u}$ となる。実現したい系 (13) は (18) と変形できるので、この左辺を $\boldsymbol{u}$ とすれば、目的とする制御が実現される。

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = M_d^{-1}D_d\dot{\boldsymbol{e}} + M_d^{-1}K_d\boldsymbol{e} + M_d^{-1}\boldsymbol{F} \tag{18}$$

まとめると、(19) の $\boldsymbol{\tau}$ により、望ましいインピーダンスが実現される。

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q})M_d^{-1}\left(D_d\dot{\boldsymbol{e}} + K_d\boldsymbol{e}\right) - M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q})\dot{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \hat{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \left(M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q})M_d^{-1} - J^T\right)\boldsymbol{F} \tag{19}$$

5.3 簡略化

システムの手先座標における運動方程式は (16) で表されるが、記述が煩雑であるので、(20) 以下のように座標変換を行っておく。

$$\begin{aligned} M_x(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{x}} + \hat{h}_x(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= \left(J(\boldsymbol{q})^T\right)^{-1}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{F} \\ where, \quad M_x(\boldsymbol{q}) &= \left(J(\boldsymbol{q})^T\right)^{-1}M(\boldsymbol{q})J(\boldsymbol{q})^{-1} \\ \hat{h}_x(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= \left(J(\boldsymbol{q})^T\right)^{-1}\hat{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - M(\boldsymbol{q})_x\dot{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \end{aligned} \tag{20}$$

これまでの式では、本来システムが持っている慣性行列 $M(\boldsymbol{q})$（もしくは $M_x(\boldsymbol{q})$）を制御によって定数行列 M_d とする目標状態を置いていた。これに対して、もし慣性行列がオリジナルのままで良いと考え、システムの目標状態を (21) と置く。

$$M_x(\boldsymbol{q})\ddot{x} - D_d\dot{\boldsymbol{e}} - K_d\boldsymbol{e} = K_F\boldsymbol{F} \tag{21}$$

ただし、$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x}$ とおく。

すると、(20)-(21) より、制御入力として (22) を得る。

$$\boldsymbol{\tau} = J(\boldsymbol{q})^T \left\{ \hat{h}_x(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + D_d \dot{\boldsymbol{e}} + K_d \boldsymbol{e} + (K_F - I)\boldsymbol{F} \right\} \tag{22}$$

ここで K_F は M_d を用いることができない分を補っている。例えば、K_F を対角行列とし、インピーダンスを大きくしたい方向の成分を小さく、小さくしたい方向の成分を大きく取ることで、与えたいインピーダンスを表現することができる。

なお、(20) における $\hat{h}_x(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ は、重力項を除いて $\dot{\boldsymbol{q}}$ を持つ項であるため、ゆっくりとマニピュレータを動かす場合、つまり $\dot{\boldsymbol{q}} \sim 0$ と見なせる場合は (23) でも有る程度近似的に制御を行うことができる。

$$\boldsymbol{\tau} = J(\boldsymbol{q})^T \left\{ D_d \dot{\boldsymbol{e}} + K_d \boldsymbol{e} + (K_F - I)\boldsymbol{F} \right\} \tag{23}$$

さらに、$D_d = 0$, $K_F = I$ として、$\boldsymbol{e}$ が極めて小さいと仮定して、近似的に (24) が成立しているとすると、制御入力は (25) まで簡略化される。これを**剛性制御**と呼ぶことがある。ただし、$\boldsymbol{q}_e$ は関節角空間での目標との差異とする。

$$\boldsymbol{e} = J(\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}_e \tag{24}$$

$$\boldsymbol{\tau} = J^T(\boldsymbol{q}) K_d J(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{q}_e \tag{25}$$

5.4 受動インピーダンス制御

制御機構を省くため、機構自体にインピーダンス（柔軟性）を持たせることが考えられる。このとき、スポンジをはさむような、単にハンドをやわらかくするのではなく、ある方向には柔軟に動き、ある方向には固く、といったような設計を施すことで有用な機能を持たせることが考えられる。これを受動インピーダンス制御と呼ぶことがある。この代表的なものに、**RCC ハンド** (Remote Center Compliance Hand) がある。これは、ペグやねじなどを取り付け穴に自動挿入するための機構である。

図**??**(b) について、そのコンプライアンスを考察しよう。点 O_c を原点として、ハンド座標系と同じ軸方向の Σ_c を考える。このとき、棒にかかる外力 $\boldsymbol{f}$ と棒の微小変位 $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} &= [\ f_x \quad f_y \quad f_z \quad n_x \quad n_y \quad n_z\ ]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \alpha_x \quad \alpha_y \quad \alpha_z\ ]^T \end{aligned}$$

について、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= K\boldsymbol{f} \\ K &= \begin{bmatrix} k_{soft} & & & & & \\ & k_{soft} & & & & \\ & & k_{hard} & & & \\ & & & k_{soft} & & \\ & & & & k_{soft} & \\ & & & & & k_{soft} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{26}$$

が成り立つ。；ただし、k_{soft} は小さい剛性係数、k_{hard} は大きい剛性係数である。点 O_c は、この点に並進外力が加わると並進変位のみ、回転モーメントが加わると回転変位のみを発生する点であり、**コンプライアンス中心**と呼ばれる。

このコンプライアンス中心を棒の先端近くに配した点が、このハンドのユニークな点である。ハードウェアのみで設計されたコンプライアンスが実現されるので便利だが、能動コンプライアンスのような汎用性はない。