ロボット工学第二２００４　補遺

倉林大輔

2　ラグランジュの運動方程式

ロボット（マニュピレータ）の運動は、$\boldsymbol{q}$ を一般化座標として、

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + g(\boldsymbol{q}) \tag{20}$$

と表される。その中身と意味は？

2.1　ラグランジュ法による運動の記述

いま、自由度 n のシステムが一般化座標 $\boldsymbol{q}(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ で記述されている。ここでラグランジュ関数 $L = K - P$ を導入すると (21) が成立する。

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{21}$$

ここで τ_i は各関節にかかる一般化力（トルク）であり、K および P はシステムの運動エネルギとポテンシャルエネルギをそれぞれ表す。なお、$L = K - P$ なので、

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} \tag{22}$$

と書いても同じである。

なお、剛体の運動エネルギ K は、質量中心 G の並進速度 $\dot{\boldsymbol{s}}$、回転速度 $\boldsymbol{\omega}$、質量 $\bar{m}$、慣性テンソル I を用いて、

$$K = \frac{1}{2}\bar{m}\dot{\boldsymbol{s}}^T\dot{\boldsymbol{s}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T I \boldsymbol{\omega} \tag{23}$$

と書ける。

2.2　ラグランジュ法による運動方程式の導出：2 次元の場合

以下の平面２自由度マニュピレータを考える。

$q_1 = \theta_1$、$q_2 = \theta_2$ としてラグランジュ関数を求めてみる。

リンク i の運動エネルギと位置エネルギをそれぞれ K_i、P_i とすると、リンク 1 では

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2}m_1 l_{g1}^2 \dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}\tilde{I}_1 \dot{\theta_1}^2 \\ P_1 &= m_1 \hat{g} l_{g1} S_1 \end{aligned} \tag{24}$$

、ただし $\hat{g}$ は重力加速度である。

一方リンク２について、質量中心の位置を $\boldsymbol{s}_2 = [s_{2x}, s_{2y}]^T$ と書くと、

$$\begin{aligned} s_{2x} &= l_1 C_1 + l_{g2} C_{12} \\ s_{2y} &= l_1 S_1 + l_{g2} S_{12} \end{aligned} \tag{25}$$

表 1: 2 自由度マニュピレータの設定

θ_i	関節 i の回転角度
m_i	リンク i の質量
$\tilde{I}_i$	リンク i の質量中心を通り、Z 軸に平行な軸まわりの慣性モーメント
l_i	リンク i の長さ
l_{gi}	関節 i からリンク i の質量中心までの長さ（質量中心は関節を結ぶ直線上にあるとする）。
トルク τ_i	関節 i の駆動トルク
重力	-Y 方向

なので

$$\dot{\boldsymbol{s}}_2{}^T\dot{\boldsymbol{s}}_2 = {l_1}^2\dot{\theta_1}^2 + {l_{g2}}^2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2 + 2l_1l_{g2}C_2(\dot{\theta_1}^2+\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) \tag{26}$$

よって、

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{s}}_2^T\dot{\boldsymbol{s}}_2 + \frac{1}{2}\tilde{I}_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2 \\ P_2 &= m_2\hat{g}\left(l_1S_1 + l_{g2}S_{12}\right) \end{aligned} \tag{27}$$

である。

ここから、$L = K_1 + K_2 - (P_1 + P_2)$ としてラグランジュの式に代入すると、

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \left[m_1l_{g1}^2 + \tilde{I}_1 + m_2(l_1^2 + l_{g2}^2 + 2l_1l_{g2}C_2) + \tilde{I}_2\right]\ddot{\theta}_1 \\ &\quad + \left[m_2(l_{g2}^2 + l_1l_{g2}C_2) + \tilde{I}_2\right]\ddot{\theta}_2 \\ &\quad -m_2l_1l_{g2}S_2(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta_2}^2) \\ &\quad +m_1\hat{g}l_{g1}C_1 + m_2\hat{g}(l_1C_1 + l_{g2}C_{12}) \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \left[m_2(l_{g2}^2 + l_1l_{g2}C_2) + \tilde{I}_2\right]\ddot{\theta}_1 \\ &\quad +(m_2l_{g2}^2 + \tilde{I}_2)\ddot{\theta}_2 \\ &\quad +m_2l_1l_{g2}S_2\dot{\theta_1}^2 + m_2\hat{g}l_{g2}C_{12} \end{aligned} \tag{29}$$

となる。これらを整理して、

$$\begin{aligned} \tau_1 &= M_{11}\ddot{\theta}_1 + M_{12}\ddot{\theta}_2 + h_{112}\dot{\theta_2}^2 + 2h_{122}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + g_1 \\ \tau_2 &= M_{21}\ddot{\theta}_1 + M_{22}\ddot{\theta}_2 + h_{211}\dot{\theta_1}^2 + g_2 \end{aligned} \tag{30}$$

と書くことにする。記号は以下の通りになる。

$$\begin{aligned} M_{11} &= m_1l_{g1}^2 + \tilde{I}_1 + m_2(l_1^2 + l_{g2}^2 + 2l_1l_{g2}C_2) + \tilde{I}_2 \\ M_{12} = M_{21} &= m_2(l_{g2}^2 + l_1l_{g2}C_2) + \tilde{I}_2 \\ M_{22} &= m_2l_{g2}^2 + \tilde{I}_2 \\ h_{112} = h_{122} = -h_{211} &= -m_2l_1l_{g2}S_2 \\ g_1 &= m_1\hat{g}l_{g1}C_1 + m_2\hat{g}(l_1C_1 + l_{g2}C_{12}) \\ g_2 &= m_2\hat{g}l_{g2}C_{12} \end{aligned}$$

ここで、M_{ii} を有効慣性、M_{ij} を相互慣性、h_{ijj} を遠心力加速度係数、h_{ijk} をコリオリ加速度係数、g_i を重力負荷と呼ぶ。

ここで、$\boldsymbol{q} = [\theta_1, \theta_2]^T$、$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ とおくと、運動エネルギ K は

$$K = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T M(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{31}$$

であり、$\boldsymbol{\tau}$ は

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + g(\boldsymbol{q}) \tag{32}$$

と表される。ここで $M(\boldsymbol{q})$ は正定対称行列であり、

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= col\left[\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial \theta_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{jk}}{\partial \theta_i}\right)\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k\right] \\ g(\theta) &= col[g_i] \end{aligned} \tag{33}$$

である。ただし、$col[\cdot]$ は $[\cdot]$ の列ベクトル（要素を縦に並べたもの）を表す記号である。

2.3 ラグランジュ法による運動方程式の導出：n 次元の場合

マニュピレータの台座を固定し、Σ_0 を基準座標系にとる。関節 i の駆動トルク τ_i はリンク $i-1$ と i の間に作用するものとする。リンク i に固定された座標系を Σ_i と書くが、この座標系は関節の回転軸上に O_i、回転軸が Z_i 軸と一致するように設定する。このとき、Σ_0 から Σ_i への同次変換行列は、

$${}^0T_i = {}^0T_1\,{}^1T_2 \cdots {}^{i-1}T_i \tag{34}$$

である。ここで ${}^{i-1}T_i$ は関節 i で操作できる q_i の関数である。

Σ_i に関してリンク i 上の任意の点 ${}^i\boldsymbol{r}$ が与えられたとき、Σ_0 から見たその点の位置は

$${}^0\boldsymbol{r} = {}^0T_i\,{}^i\boldsymbol{r} \tag{35}$$

である。Σ_i から見ると ${}^i\boldsymbol{r}$ は一定なので、

$$\frac{d^i\boldsymbol{r}}{dt} = 0 \quad \text{より} \quad \frac{d^0\boldsymbol{r}}{dt} = {}^0\dot{\boldsymbol{r}} = \left(\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right){}^i\boldsymbol{r} \tag{36}$$

である。ここで速度の 2 乗 $\dot{\boldsymbol{r}}^T\dot{\boldsymbol{r}}(= tr[{}^0\dot{\boldsymbol{r}}\,{}^0\dot{\boldsymbol{r}}^T])$ は次式となる。

$${}^0\dot{\boldsymbol{r}}^T\,{}^0\dot{\boldsymbol{r}} = \sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} tr\left(\frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j}\,{}^i\boldsymbol{r}\,{}^i\boldsymbol{r}^T\frac{\partial^0 T_i}{\partial q_k}^T\right)\dot{q}_j\dot{q}_k \tag{37}$$

ここで、リンク i の運動エネルギ K_i と位置エネルギ P_i を求める。

まず、運動エネルギ K_i は、

$$\begin{aligned} K_i &= \int_{link\ i}\frac{1}{2}{}^0\dot{\boldsymbol{r}}^T\,{}^0\dot{\boldsymbol{r}}\,dm \quad \text{リンク上の全質点の運動エネルギ} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} tr\left(\frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j}\hat{H}_i\frac{\partial^0 T_k}{\partial q_k}^T\right)\dot{q}_j\dot{q}_k \end{aligned} \tag{38}$$

ただし、$\int_{link\ i}$ はリンク i 全体に渡る積分を意味し、dm は ${}^i\boldsymbol{r}$ の微小質量である。また、$\hat{H}_i$ は擬似慣性行列と呼ばれ、その要素は以下の通りである。

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_i &= \int_{link\ i} {}^i\boldsymbol{r}{}^i\boldsymbol{r}^T dm \qquad (39)\\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-\hat{I}_{ixx}+\hat{I}_{iyy}+\hat{I}_{izz}) & \hat{H}_{ixy} & \hat{H}_{ixz} & m_i\hat{s}_{ix} \\ \hat{H}_{ixy} & \frac{1}{2}(\hat{I}_{ixx}-\hat{I}_{iyy}+\hat{I}_{izz}) & \hat{H}_{iyz} & m_i\hat{s}_{iy} \\ \hat{H}_{ixz} & \hat{H}_{iyz} & \frac{1}{2}(\hat{I}_{ixx}+\hat{I}_{iyy}-\hat{I}_{izz}) & m_i\hat{s}_{iz} \\ m_i\hat{s}_{ix} & m_i\hat{s}_{iy} & m_i\hat{s}_{iz} & m_i \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ただし、${}^i\boldsymbol{r} = [{}^ir_x, {}^ir_y, {}^ir_z]$ として、

$$
\begin{aligned}
\hat{I}_{ixx} &= \int_{link\ i} ({}^ir_y{}^2 + {}^ir_z{}^2)dm \quad \text{慣性モーメント}\\
\hat{H}_{ixy} &= \int_{link\ i} {}^ir_x{}^ir_y dm \quad \text{慣性乗積}\\
m_i &= \int_{link\ i} dm \quad \text{質量}\\
\hat{s}_{ix} &= \int_{link\ i} {}^ir_x dm/m_i \quad \text{質量中心位置}
\end{aligned}
$$

である。$\hat{I}_{iyy}, \hat{I}_{izz}, \hat{H}_{ixz}, \hat{H}_{iyz}, \hat{s}_{iy}, \hat{s}_{iz}$ も同様である。なお、$\hat{H}_i$ は Σ_i 上で一定であり、$\boldsymbol{q}$ によらない。

次に位置エネルギ P_i を求める。いま、

$$\tilde{\boldsymbol{g}} = [\tilde{g}_x, \tilde{g}_y, \tilde{g}_z]^T \qquad (40)$$

を Σ_0 上の重力加速度ベクトルとする。Σ_0 の原点を含み、$\tilde{\boldsymbol{g}}$ に垂直な平面を基準としたとき、

$$P_i = -m_i\tilde{\boldsymbol{g}}^T{}^0T_i{}^i\hat{s}_i \qquad (41)$$

ただし、${}^i\hat{\boldsymbol{s}}_i$ は Σ_i の原点 O_i からリンク i の質量中心までのベクトルを Σ_i 上で表したもので、

$${}^i\hat{\boldsymbol{s}}_i = [\hat{s}_{ix}, \hat{s}_{iy}, \hat{s}_{iz}]^T \qquad (42)$$

である。

これをラグランジュ関数

$$L = \sum_{i=1}^{n}(K_i - P_i) \qquad (43)$$

に代入し、さらに

$$Q_{ib} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (44)$$

に代入し、トレースと微分を入れ替えて整理すると、

$$
\begin{aligned}
\tau_i &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} tr\left(\frac{\partial {}^0T_k}{\partial q_j}\hat{H}_k\frac{\partial {}^0T_k{}^T}{\partial q_i}\right)\ddot{q}_j \qquad (45)\\
&\quad + \sum_{k=i}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{m=1}^{k} tr\left(\frac{\partial^2 {}^0T_k}{\partial q_i \partial q_m}\hat{H}_k\frac{\partial {}^0T_k{}^T}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j\dot{q}_m - \sum_{j=i}^{n} m_j\tilde{\boldsymbol{g}}^T\frac{\partial {}^0T_j}{\partial q_i}{}^j\hat{\boldsymbol{s}}_j
\end{aligned}
$$

となる。

これを $\ddot{\boldsymbol{q}}$、$\dot{\boldsymbol{q}}$、$\boldsymbol{q}$ について整理すれば

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + g(\boldsymbol{q}) \tag{46}$$

と書ける。ここで慣性行列 $M(\boldsymbol{q})$ は $n \times n$ 対称行列であり、

$$M_{ij} = \sum_{k=max(i,j)}^{n} tr\left(\frac{\partial^0 T_k}{\partial q_j}\hat{H}_k\frac{\partial^0 T_k}{\partial q_i}^T\right) \tag{47}$$

である。

$h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ は n 次元ベクトルであり、

$$h_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=max(i,j)}^{n} tr\left(\frac{\partial^{2}{}^0 T_k}{\partial q_j \partial q_m}\hat{H}_k\frac{\partial^0 T_k}{\partial q_i}^T\right)\dot{q_j}\dot{q_m} \tag{48}$$

である。これは遠心力とコリオリ力を表している。

$g(\boldsymbol{q})$ は重力負荷を表す n 次元ベクトルであり、

$$g_i = -\sum_{j=1}^{n} m_j \tilde{\boldsymbol{g}}^T \frac{\partial^0 T_j}{\partial q_i}{}^j\hat{\boldsymbol{s}}_j \tag{49}$$

である。ただし、$j < i$ ではゼロになる。

なお、全運動エネルギ $K(= \sum_{i=1}^{n} K_i)$ は、

$$K = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T M(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{50}$$

と書ける。運動エネルギは非負であるから、$M(\boldsymbol{q})$ は非負定である。また、

$$\begin{aligned} Q_{ib} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} \\ h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= \boldsymbol{\tau} - M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} - g(\boldsymbol{q}) \end{aligned} \tag{51}$$

なので

$$h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \dot{M}\dot{\boldsymbol{q}} - col\left[\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T\frac{\partial M}{\partial q_i}\dot{\boldsymbol{q}}\right] \tag{52}$$

である。さらに、

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= col\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i}\right)\dot{q_j}\dot{q_k}\right] \\ h_{ijk} &= \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{53}$$

と表すことができる。