

# ロボット工学第二2004 補遺

倉林大輔

## 1 ロボットの座標系

### 1.1 表記と座標変換

座標系  $\Sigma_A$  から見た点  ${}^A\mathbf{p} = ({}^Ax, {}^Ay, {}^Az)$ 。回転行列  ${}^AR_B$  は  $\Sigma_A$  と  $\Sigma_B$  の相対関係のうち、回転の変換を表す。

$$({}^AR_B)^T = {}^AR_B^{-1} \quad (\text{直交行列}) \quad (1)$$

$${}^A\mathbf{r} = {}^AR_B {}^B\mathbf{r} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} {}^A\mathbf{r} &= {}^AR_B {}^BR_A {}^A\mathbf{r} \\ &\rightarrow {}^AR_B {}^BR_A = I \\ &\rightarrow {}^BR_A = ({}^AR_B)^{-1} = {}^AR_B^T \end{aligned} \quad (3)$$

$${}^AR_B {}^BR_C = {}^AR_C \quad (4)$$

### 1.2 オイラー角 (ZYZ オイラー角)

回転行列は9成分もあるので、もっと簡便に表したい。 $(\phi, \theta, \psi)$  で表す。

$$\Sigma_A \rightarrow \phi \rightarrow \Sigma_{A'} \rightarrow \theta \rightarrow \Sigma_{A''} \rightarrow \psi \rightarrow \Sigma_B$$

オイラー角と回転行列の関係は以下の通り。

$$\begin{aligned} {}^AR_{A'} &= \begin{bmatrix} C_\phi & -S_\phi & 0 \\ S_\phi & C_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^{A'}R_{A''} &= \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \\ {}^{A''}R_B &= \begin{bmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^AR_B &= {}^AR_{A'} {}^{A'}R_{A''} {}^{A''}R_B \quad \text{より} \\ {}^AR_B &= \begin{bmatrix} C_\phi C_\theta C_\psi - S_\phi S_\psi & -C_\phi C_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta \\ S_\phi C_\theta C_\psi + C_\phi S_\psi & -S_\phi C_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & S_\phi S_\theta \\ -S_\theta C_\psi & S_\theta S_\psi & C_\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

なお、 $C_\theta = \cos\theta$ 、 $C_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$  を表す。

逆に、任意の  ${}^A R_B$  が与えられると、オイラー角が求められる（一意とは限らない）。

### 1.3 同次変換

$\Sigma_A$  と  $\Sigma_B$  について、 $\Sigma_B$  の位置が  $\Sigma_A$  に対して  ${}^A \mathbf{p}_B$ 、姿勢が  ${}^A R_B$  とする。ここで  $\Sigma_B$  で  ${}^B \mathbf{r}$  という点を  $\Sigma_A$  から見ると

$${}^A \mathbf{r} = {}^A R_B {}^B \mathbf{r} + {}^A \mathbf{p}_B \quad (6)$$

である。これを次のように書いたとき、 ${}^A T_B$  を同次変換行列という。

$$\begin{bmatrix} {}^A \mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R_B & | & {}^A \mathbf{p}_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B \mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix} \equiv {}^A T_B \begin{bmatrix} {}^B \mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

以降、適当に  ${}^A \mathbf{r} = {}^A T_B {}^B \mathbf{r}$  と書いたりすることがある。同時変換について以下が成り立つ。

$${}^A T_C = {}^A T_B {}^B T_C \quad (8)$$

$${}^B T_A = {}^A T_B^{-1} = \begin{bmatrix} {}^A R_B^T & | & -{}^A R_B^T {}^A \mathbf{p}_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 1.4 一般化座標と手先

ロボットの関節の変位： $q_i$

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \quad (10)$$

ロボットの手先の位置と姿勢

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_m]^T \quad (3 \text{ 次元空間なら } m = 6) \quad (11)$$

$\mathbf{r}$  と  $\mathbf{q}$  の関係はマニピレータの機構によって定まり、一般に非線形。

$$\mathbf{r} = f_r(\mathbf{q}) \quad (12)$$

と書くことにする。 $\mathbf{r}$  は  $\mathbf{q}$  によって一意に定まる。 $\mathbf{r}$  の動きを決めて、それを実現する  $\mathbf{q}$  を知りたい場合が多い。形式的に

$$\mathbf{q} = f_r^{-1}(\mathbf{r}) \quad (13)$$

と書けるが、 $\mathbf{q}$  は存在するとは限らず、存在しても一意とは限らない。

$\mathbf{q}$  から  $\mathbf{r}$  を求めることを順運動学、 $\mathbf{r}$  から  $\mathbf{q}$  を求めることを逆運動学という。

### 1.5 ヤコビ行列

$\dot{\mathbf{r}}$  と  $\dot{\mathbf{q}}$  の関係を表したものの。

$$J_r(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial q_1} & \frac{\partial r_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial r_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_m}{\partial q_1} & \frac{\partial r_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial r_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (14)$$

このとき、 $\dot{\mathbf{r}} = J_r(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$  が成立する。 $J_r(\mathbf{q})$  を省略して  $J_r$  と書くことがある。

## 1.6 もう1つのヤコビ行列 $J_v$

手先の姿勢表現にオイラー角を使い、基準座標系  $\Sigma_R$  に対する位置、姿勢をそれぞれ  ${}^R\mathbf{p}_E$ 、 ${}^R\boldsymbol{\phi}_E$  とし、

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} {}^R\mathbf{p}_E \\ {}^R\boldsymbol{\phi}_E \end{bmatrix} \quad (15)$$

とする。このとき、前節の定義により

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} {}^R\dot{\mathbf{p}}_E \\ {}^R\dot{\boldsymbol{\phi}}_E \end{bmatrix} = J_r(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (16)$$

が成立する。ところが、 ${}^R\dot{\boldsymbol{\phi}}_E$  は基準座標系の各軸に対する回転変換の変化量を与えているため、手先の「現在の状況と微小時間後の状況の差分」という意味での微分を直接与えてくれない。

一方、座標系の任意の回転は、ある1つの回転中心軸まわりの回転として定義することができる。これを利用し、回転中心軸と同じ方向を持ち、回転速度に相当する大きさを持つベクトル  ${}^R\boldsymbol{\omega}_E$  を定義することができる。

これを用いて、 $\dot{\mathbf{r}}$  に代えて「手先速度ベクトル」 $\mathbf{v}$  を

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} {}^R\dot{\mathbf{p}}_E \\ {}^R\boldsymbol{\omega}_E \end{bmatrix} \quad (17)$$

と定義すると、この  $\mathbf{v}$  についても  $\mathbf{q}$  との間の偏微分導関数行列  $J_v(\mathbf{q})$  が定義できて

$$\mathbf{v} = J_v(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (18)$$

という関係が成立する。この  $J_v$  もヤコビ行列と呼ぶ。

$J_v$  は回転に関する成分が  $J_r$  と異なるので注意が必要。なお、 $J_r$  と  $J_v$  は次の変換で結ばれている。

$$J_v = \left[ \begin{array}{c|ccc} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ \hline & & & 0 & -S_\phi & C_\phi S_\theta \\ & 0 & & 0 & C_\phi & S_\phi S_\theta \\ & & & 1 & 0 & C_\theta \end{array} \right] J_r \quad (19)$$

ただし、 $S_\theta \neq 0$  である。