6　特殊関数とラプラス変換

6.1　ヘビサイド関数

ヘビサイド関数 $H_a(t)$

$$H_a(t) = \begin{cases} 0 & (-\infty < t < a) \\ \frac{1}{2} & (t = a) \\ 1 & (a < t < \infty) \end{cases} \tag{1}$$

そのラプラス変換

$$\mathcal{L}\left[H_a(t)\right] = \frac{e^{-as}}{s} \tag{2}$$

特に $a = 0$ ならば

$$\mathcal{L}\left[H_0(t)\right] = \frac{1}{s} \tag{3}$$

（証明）

$$I = \int_0^\infty e^{-st} H_a(t) dt = \int_a^\infty e^{-st} dt$$

とおくと、$t = x + a \to x = t - a$ の変数変換により

$$I = \int_0^\infty e^{-s(x+a)} dx = e^{-as} \int_0^\infty e^{-sx} dx = \frac{e^{-as}}{s} \quad (s > 0)$$

と得られる。■

6.2　ディラクのδ関数

$\varepsilon > 0$ に対して次のような関数 $f_\varepsilon(t)$ を考える。

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & (-\infty < t < -\frac{\varepsilon}{2}) \\ \frac{1}{\varepsilon} & (-\frac{\varepsilon}{2} \leq t \leq \frac{\varepsilon}{2}) \\ 0 & (\frac{\varepsilon}{2} < t < \infty) \end{cases} \qquad \text{ただし} \quad \int_{-\infty}^\infty f_\varepsilon(t) dt = 1 \tag{4}$$

このとき、$\varepsilon \to 0$ としたときの $f_\varepsilon(t)$ の極限をディラクのδ関数と呼び、$\delta(t)$ と書く。

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & (-\infty < t < 0) \\ \infty & (t = 0) \\ 0 & (0 < t < \infty) \end{cases} \qquad \text{ただし} \quad \int_{-\infty}^\infty \delta(t) dt = 1 \tag{5}$$

そのラプラス変換

$$\mathcal{L}\left[\delta(t-a)\right] = e^{-as} \quad (a > 0) \tag{6}$$

（証明） $f_\varepsilon(t-a)$ はヘビサイド関数を用いて次式のように表すことができる。

$$f_\varepsilon(t-a) = \frac{1}{\varepsilon}\left(H_{a-\frac{\varepsilon}{2}}(t) - H_{a+\frac{\varepsilon}{2}}(t)\right)$$

これをラプラス変換して次式を得る。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f_\varepsilon(t-a)\right] &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{e^{-(a-\frac{\varepsilon}{2})s}}{s} - \frac{e^{-(a+\frac{\varepsilon}{2})s}}{s}\right) \\ &= e^{-as}\frac{e^{\frac{\varepsilon s}{2}} - e^{-\frac{\varepsilon s}{2}}}{\varepsilon s} = e^{-as}\frac{\sinh\frac{\varepsilon s}{2}}{\frac{\varepsilon s}{2}}\end{aligned}$$

ここで $\lim_{t\to 0}\frac{\sinh t}{t} = 1$ が知られているので

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\mathcal{L}\left[f_\varepsilon(t-a)\right] = e^{-as}$$

なお、$a \to +0$ ならば $\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1$ である。■

6.3 ヘビサイド関数とδ関数の関係

ヘビサイド関数 $H_a(t)$ とδ関数 $\delta(t-a)$ の間には

$$\frac{d}{dt}H_a(t) = \delta(t-a) \tag{7}$$

なる関係がある。また、微分法則から

$$\mathcal{L}\left[\delta(t-a)\right] = s\mathcal{L}\left[H_a(t)\right] \quad (a > 0) \tag{8}$$

である。

（証明） 先の $f_\varepsilon(t)$ をもちいて次のように $g_\varepsilon(t)$ を定義する。

$$g_\varepsilon(t) = \int_\infty^t f_\varepsilon(x)dx = \begin{cases} 0 & (-\infty < t < -\frac{\varepsilon}{2}) \\ \frac{1}{\varepsilon}t + \frac{1}{2} & (-\frac{\varepsilon}{2} \le t \le \frac{\varepsilon}{2}) \\ 1 & (\frac{\varepsilon}{2} < t < \infty) \end{cases}$$

すると明らかに、$\lim_{\varepsilon\to+0} g_\varepsilon(t) = H_0(t)$ であり、$\lim_{\varepsilon\to+0} f_\varepsilon(t) = \delta(t)$ であることから次式が成立。

$$H_0(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x)dx$$

両辺を微分すれば

$$\frac{d}{dt}H_0(t) = \delta(t)$$

よって $\frac{d}{dt}H_a(t) = \delta(t-a)$ である。■

6.4 区分的に定義された関数

6.4.1 ヘビサイド関数表示

連続な関数 $f(t)$ を用いて、区間 $a \leq t \leq b$ でのみ定義された関数を表現する。

$$(H_a(t) - H_b(t))\, f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < a) \\ f(t) & (a \leq t \leq b) \\ 0 & (b < t < \infty) \end{cases} \tag{9}$$

6.4.2 関数の移動法則

$$\mathcal{L}\left[H_a(t) f(t-a)\right] = e^{-as} F(s) \tag{10}$$

（証明）

$$\begin{aligned} I \;=\; \mathcal{L}\left[H_a(t) f(t-a)\right] &= \int_0^\infty e^{-st} H_a(t) f(t-a) dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt \end{aligned}$$

ここで $x = t - a$ の変数変換を行えば、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty e^{-s(x+a)} f(x) dx \\ &= e^{-as} \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \\ &= e^{-as} F(s) \end{aligned}$$

■

6.4.3 区分的に定義された関数のラプラス変換

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[(H_a(t) - H_b(t))\, f(t)\right] &= \mathcal{L}\left[H_a(t) f(t)\right] - \mathcal{L}\left[H_b(t) f(t)\right] \\ &= e^{-as} \mathcal{L}\left[f(t+a)\right] - e^{-bs} \mathcal{L}\left[f(t+b)\right] \end{aligned} \tag{11}$$

特に $a = 0$ ならば

$$\mathcal{L}\left[(H_0(t) - H_b(t))\, f(t)\right] = F(s) - e^{-bs} \mathcal{L}\left[f(t+b)\right] \tag{12}$$

6.5 周期関数

6.5.1 １周期毎に定義された関数

連続関数 $\varphi(t)$ $(0 \leq t < \infty)$ が $0 < T < t < \infty$ では $\varphi(t) = 0$ であるとする。このとき、周期 T の関数 $f(t)$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} f(t) = \varphi(t) & (0 \leq t < T) \\ f(t+T) = f(t) & (0 \leq t < \infty) \end{cases} \tag{13}$$

このとき、$\mathcal{L}[\varphi(t)] = \Phi(s)$ とおけば、

$$F(s) = \frac{\Phi(s)}{1 - e^{-Ts}} \tag{14}$$

となる。

（証明） ヘビサイド関数と関数の移動法則を用いて

$$\varphi_{nT}(t) = H_{nT}(t)\varphi(t - nT)$$

とおくと、

$$f(t) = \varphi(t) + \varphi_T(t) + \varphi_{2T}(t) + \cdots$$

よって $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[\varphi(t)] + \mathcal{L}[\varphi_T(t)] + \mathcal{L}[\varphi_{2T}(t)] + \cdots \\ &= \Phi(s) + e^{-Ts}\Phi(s) + e^{-2Ts}\Phi(s) + \cdots \\ &= \Phi(s)\left(1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \cdots\right) \\ &= \frac{\Phi(s)}{1 - e^{-Ts}} \end{aligned}$$

■

6.5.2 半周期毎に定義された関数

連続関数 $\varphi(t)$ $(0 \leq t < \infty)$ が $0 < T < t < \infty$ では $\varphi(t) = 0$ であるとする。このとき、周期 $2T$ の関数 $g(t)$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} g(t) = \varphi(t) & (0 \leq t < T) \\ g(t+T) = -g(t) & (0 \leq t < \infty) \end{cases} \tag{15}$$

このとき、$\mathcal{L}[\varphi(t)] = \Phi(s)$ とおけば、

$$F(s) = \frac{\Phi(s)}{1 + e^{-Ts}} \tag{16}$$

となる。

（証明）ヘビサイド関数と関数の移動法則を用いて

$$g(t) = \varphi(t) - \varphi_T(t) + \varphi_{2T}(t) - \cdots$$

であるので

$$\begin{aligned} G(s) &= \Phi(s)\left(1 - e^{-Ts} + e^{-2Ts} - \cdots\right) \\ &= \frac{\Phi(s)}{1 + e^{-Ts}} \end{aligned}$$

■

7　指数位数

7.1　ラプラス変換できる条件

関数 $f(t)$ がラプラス変換可能であるためには、$f(t)e^{-st}$ が $t \to \infty$ でゼロに近づいていくことが必要。そこで、

$$|f(t)| < Me^{at} \quad \text{もしくは} \quad e^{-at}|f(t)| < M$$

を満たす正定数 a, M が存在するかどうかを考える。これらが存在するとき、$f(t)$ は指数位数である、という。

関数 $f(t)$ が指数位数であるとき、$s > a$（正確には $Re(s) > a$）で

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-st}dt \ < \ M\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt \ = \ \frac{M}{s-a}$$

よりラプラス変換が可能。a を増加指数と呼ぶことがある。

7.2　像の極限（定理）

増加指数 $a > 0$ の $f(t)$ が連続で、かつその微分も連続であるとき、$f(t)$ の像関数 $F(s)$ は

$$\lim_{|s|\to\infty} F(s) = 0 \qquad (Re(s) > 0) \tag{17}$$

となる。

7.3　ラプラス逆変換の一般公式

$f(t)$ が増加指数 a であるとき、その像関数 $F(s)$ は $Re\, s > a$ つまり複素平面の右半面で正則であることが知られている。

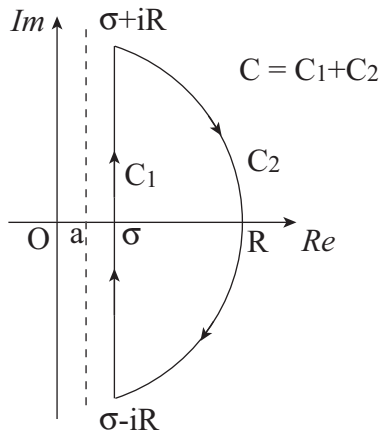

図 1: 逆変換誘導の積分経路

このとき、図 1 のような積分経路を考えると、コーシーの積分公式から次式が成り立つ。

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-C}\frac{F(z)}{z-s}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{F(z)}{s-z}dz$$

像の極限定理より、$\lim_{|s|\to\infty} F(s) = 0$ であるから、積分経路 C において $R \to \infty$ としたとき、半円 C_2 の寄与はゼロである。よって

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR}\frac{F(z)}{s-z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(z)}{s-z}dz \quad (\sigma > a)$$

この式の両辺を逆ラプラス変換すると

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i}\mathcal{L}^{-1}\left[\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(z)}{s-z}dz\right] \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(z)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-z}\right]dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(z)e^{zt}dz \end{aligned}$$

を得る。これが像関数に対する逆ラプラス変換の一般形である。これを**ブロムウィッチの積分表示**という。