5　ラプラス変換

5.1　ラプラス変換とは

ある演算子を定義して、微分や積分を代数学的に扱えるようにする変換

定義

ある関数 $f(t)$: $0 \leq t < \infty$ について

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \equiv \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt \tag{1}$$

が存在（右辺が有限値を持つ）とき、これを $f(t)$ のラプラス変換という。t の関数から s の関数に変換される。

記号と用語

- $\mathcal{L}[f(t)] \;=\; F(s)$　変換後の関数は大文字で書く。
- 逆変換を $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] \;=\; f(t)$ と書く。
- $f(t)$ は $F(s)$ の原関数
- $F(s)$ は $f(t)$ の像関数
- $F(s) = \mathcal{L}(f)$、$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)$ と書くことがある。

収束域・収束座標

例：$f(t) = 1$ をラプラス変換

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(1) &= \int_0^\infty e^{-st}\, dt \;=\; \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^T \\ &= \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sT} + \frac{1}{s}\right)\end{aligned}$$

ここで

$$\lim_{T\to\infty} e^{-sT} = \begin{cases} 0 & (s > 0) \\ \infty & (s < 0) \end{cases}$$

であることから、ラプラス変換が存在するのは $s > 0$（正確には $Re(s) > 0$）に限られる。これを収束域という。また、ラプラス変換の存在と非存在の境目を収束座標（この場合 $s = 0$）という。

このラプラス変換の結果は、次のように書く。

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s} \quad (s > 0)$$

5.2 演算則

(1) 基本法則 •

- $\mathcal{L}[af+bg]=a\mathcal{L}[f]+b\mathcal{L}[g]$
- $\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})\quad(a>0)$
- $\mathcal{L}^{-1}[F(as)]=\frac{1}{a}f(\frac{t}{a})\quad(a>0)$
- $\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right]=F(s-a)$

(2) 微分法則 $f(t)$ が微分可能でかつ $t\to\infty$ で $e^{-st}f(t)\to 0$ ならば

$$\mathcal{L}[f']=sF(s)-f(0)$$

さらに、$f(t)$ が n 回微分可能で、$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$ について $t\to\infty$ で $e^{-st}f(t)^{(n)}\to 0$ ならば

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^nF(s)-f(0)s^{n-1}-f'(0)s^{n-2}-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

が成り立つ。

(3) 積分法則 $f(x)$ において $t\to\infty$ で $e^{-st}\int_0^t f(x)\,dx\ \to\ 0$ が成り立つとき、次が成り立つ。

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)\,dx\right]=\frac{1}{s}F(s)$$

(4) 像の微分

$$\mathcal{L}[-tf]=\frac{d}{ds}F(s)$$

(5) 像の積分

$$\mathcal{L}\left[\frac{f}{t}\right]=\int_s^\infty F(r)dr$$

5.3 有理式のラプラス逆変換

有理式：多項式 $P(s),\ Q(s)$ によって $F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$ の形で表される式。

$P(s)$ の次数が $Q(s)$ より低いときの原関数を求める場合、部分分数に展開して求める。

例１

$$F(s)\ =\ \frac{s+1}{s(s+2)}\ =\ \frac{1}{2}\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+2}$$

であるので、

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]=\frac{1}{2}\left(1+e^{-2t}\right)$$

例２

$$F(s) \;=\; \frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)} \;=\; \frac{A}{s-1} + \frac{B(s+1)+C}{(s+1)^2+2^2}$$

という展開を考えると、分子の比較により

$$A\left((s+1)^2+2^2\right) + (B(s+1)+C)\,(s-1) = 5s+3 \tag{2}$$

が成り立つように A, B, C を決めれば、$F(s)$ を部分分数に分解できる。この際、分母の解 $s = 1,\ -1 \pm 2i$ を (2) に代入すると良い。

- $s = 1$ を代入　$8A = 8 \;\rightarrow\; A = 1$
- $s = -1+2i$ を代入　$(2iB + C)(-2+2i) = -2+10i$　実部虚部を比較して $B = -1, C = 3$

元に戻って

$$F(s) \;=\; \frac{1}{s-1} + \frac{-(s+1)+3}{(s+1)^2+2^2} \;=\; \frac{1}{s-1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{3}{2}\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

よって

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F\right] = e^t - e^{-t}\cos 2t + \frac{3}{2}e^{-t}\sin 2t$$

例３ $Q(s) = (s-a)^m$ パターン

$$F(s) = \frac{s^2}{(s-a)^3} = \frac{A}{(s-a)^3} + \frac{B}{(s-a)^2} + \frac{C}{s-a}$$

という展開を考えて

$$A + B(s-a) + C(s-a)^2 = s^2 \tag{3}$$

を解く。まず分母の解 $s = a$ を代入して $A = a^2$ が求まる。

ついで、(3) を s で微分すると

$$B + 2C(s-a) = 2s$$

を得るので、$s = a$ を再度代入して $B = 2a$ と分かり、これから $C = 1$ である。よって

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{a^2}{(s-a)^3} + \frac{2a}{(s-a)^2} + \frac{1}{s-a} \\ \mathcal{L}^{-1}\left[F\right] &= \frac{a^2}{2}t^2e^{at} + 2ate^{at} + e^{at} \\ &= \left(\frac{a^2}{2}t^2 + 2at + 1\right)e^{at} \end{aligned}$$

例 4 $Q(s) = (s-a)^m(s^2+bs+c)^n$ パターン

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s^2+1)^2} + \frac{Ds+E}{s^2+1}$$

という展開を考えて

$$A(s^2+1)^2 + (Bs+C)s + (Ds+E)s(s^2+1) = 1 \tag{4}$$

を解く。分母の解 $s=0, s=i$ を代入して $A=1,\ B=-1,\ C=0$ を得る。
ついで (4) を s で微分することで

$$4As(s^2+1)+Bs+(Bs+C)+Ds(s^2+1)+(Ds+E)(s^2+1)+2s^2(Ds+E)=0$$

を得るので、$s=i$ を代入して $E=0,\ D=-1$ を得る。以上から

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s}{(s^2+1)^2} - \frac{s}{s^2+1} \\ \mathcal{L}^{-1}[F] &= 1 - \frac{1}{2}t\sin t - \cos t \end{aligned}$$

と求まる

なお、$\frac{s}{(s^2+1)^2}$ の逆ラプラス変換については

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{-2s}{(s^2+1)^2} \quad \text{より} \quad \frac{s}{(s^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

ここで $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin t$ なので、微分法則を応用して

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right] = -\frac{1}{2}(-t)\sin t = \frac{t}{2}\sin t$$

と得られる。

5.4 常微分方程式を解く

ラプラス変換を使うと、微分方程式を代数方程式のように解くことができる場合がある。例を示して説明する。

例 1 1 階・初期値問題

$$\begin{cases} \dot{y} + 2y = e^t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

を解こう。与式をラプラス変換すると

$$sY - y(0) + 2Y = \frac{1}{s-1}$$

を得る。これを**像方程式**という。$y(0)=1$ を代入し、Y について解くと

$$Y=\frac{1}{(s-1)(s+2)}+\frac{1}{s+2}=\frac{s}{(s-1)(s+2)}=\frac{1}{3}\frac{1}{s-1}+\frac{2}{3}\frac{1}{s+2}$$

が得られる。これを逆変換することにより、次のように $y(t)$ を求めることができた。

$$y(t)=\frac{1}{3}e^{t}+\frac{2}{3}e^{-2t}$$

なお、この式を見ると、第１項は時間 t の増大とともに指数的に増大する一方で、第２項はゼロに収束していく。結果、$y(t)$ は時間経過とともに無限大に発散してしまう。第１項は極 $s=1$、つまり像方程式の分母における $(s-1)$ に由来している。このように、**実部が正の極を持つシステムは、時間経過とともに無限大に発散**してしまう。

例２　２階・初期値問題

$$\begin{cases}\ddot{y}+4y=e^{2t}\\ y(0)=1,\ \dot{y}(0)=2\end{cases}$$

を解こう。与式をラプラス変換して像方程式を求める。

$$s^2Y-sy(0)-\dot{y}(0)+4Y=\frac{1}{s-2}$$

$$Y=\frac{1}{8}\frac{1}{s-2}+\frac{7}{8}\frac{s}{s^2+4}+\frac{7}{8}\frac{2}{s^2+4}$$

像方程式を逆変換することで、$y(t)$ を得る。

$$y(t)=\frac{1}{8}e^{2t}+\frac{7}{8}\cos 2t+\frac{7}{8}\sin 2t$$

例３　２階・境界条件

$$\begin{cases}\ddot{y}-y=0\\ y(0)=1,\ y(1)=1\end{cases}$$

を解こう。与式をラプラス変換して像方程式を求める。

$$s^2Y-sy(0)-\dot{y}(0)-Y=0$$

ここで $\dot{y}(0)$ は不明だが、そのまま Y を解く。

$$Y=\frac{s}{s^2-1}+\frac{\dot{y}(0)}{s^2+1}$$

逆変換により $y(t)$ を求める。

$$y(t)=\cosh t+\dot{y}(0)\sinh t$$

ここで $y(1) = \cosh 1 + \dot{y}(0)\sinh 1$ であるので

$$\dot{y}(0) = \frac{1-\cosh 1}{\sinh 1}$$

であることが分かる。よって次の $y(t)$ を得る。

$$y(t) = \cosh t + \frac{1-\cosh 1}{\sinh 1}\sinh t = \frac{\sinh t}{\sinh 1} + \frac{\sinh(1-t)}{\sinh 1}$$

例 4　2 階・一般解

$$\begin{cases} \ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = t \\ y(0) = y_0,\ \dot{y}(1) = \dot{y}_0 \end{cases}$$

について、$y_0,\ \dot{y}_0$ が任意定数である一般解を求めよう。与式をラプラス変換し、像方程式を求める。

$$(s^2Y - y_0 s - \dot{y}_0) - 3(sY - y_0) + 2Y = \frac{1}{s^2}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{y_0 s + \dot{y}_0 - 3y_0}{(s-1)(s-2)} + \frac{1}{s^2(s-1)(s-2)} \\ &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{1}{2s^2} + \frac{3}{4s} \end{aligned}$$

ここで $A,\ B$ は任意定数である。これを逆変換し $y(t)$ の一般解を得る。

$$y(t) = Ae^t + Be^{2t} + \frac{t}{2} + \frac{3}{4}$$

例 5　合成積の利用　実関数 $f(t),\ g(t)$ から

$$h(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)\,dx \tag{5}$$

を作るとき、$h(t)$ を $f(t)$ と $g(t)$ の**合成積**といい、$f * g$ と書く。合成積について、以下の性質が成り立つ。

- $f * g = g * f$
- $\mathcal{L}(f * g) = F(s)G(s)$

これを利用して、次の 1 階常微分方程式を解こう。ただし $f(t)$ は既知であるとする。

$$\begin{cases} \dot{y} + ay = f(t) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

ラプラス変換により像方程式を求める。

$$sY - \alpha + aY = F(s)$$

$$Y = \frac{\alpha}{s+a} + \frac{1}{s+a}F(s)$$

ここで $\frac{1}{s+a} = \mathcal{L}[e^{-at}]$ であることに着目すると、右辺第二項は e^{-at} と $f(t)$ の合成積をラプラス変換したものと考えることができる。よって、この式は次のように逆ラプラス変換できる。

$$y(t) = \alpha e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-x)} f(x)\, dx$$

つまり、$f(t)$ を個別にラプラス変換することなく解を得ることができる。