# 4　留数

## 4.1　関数の展開

### 4.1.1　正則関数のテーラー展開

ある複素関数 $f(z)$ が $D$ 上で正則であるとき、$D$ 内の 1 点 $z_0$ を中心として $D$ に含まれる開円板 $\{z : |z - z_0| < \rho\}$ において

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n \tag{1}$$

$$A_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1)}} d\zeta \tag{2}$$

と展開することができる。これを複素関数の**テーラー展開**という。ただし $C$ は $z_0$ を中心とする半径 $r < \rho$ の円である。なお、$z_0 = 0$ に限定した展開を、実関数と同様に**マクローリン展開**と呼ぶことがある。

※実数関数では、ある点

テーラー展開には以下の性質がある。

- 展開結果は $\rho$ には無関係で、$z_0$ のみに依存する。
- $z_0$ に対する展開は一意に決まる。

面白いことに、展開結果が $\rho$ に依存しないという性質から、微分計算をすることなく展開結果を求めることができる場合がある。

**（例）** $f(z) = \frac{1}{z}$ を $z_0 = i$ でテーラー展開する。

この $f(z)$ は $z \neq 0$ で正則であるから、$f(z)$ がその内部で正則であるような開円板のうち最も大きいものは $|z - i| < 1$ である。ところで、$f(z)$ は次のように変形できる。

$$\frac{1}{z} = (-i)\frac{1}{1 - \{i(z - i)\}}$$

いま、$|z - i| < 1$ という条件から、これを項比 $i(z - i)$ の等比級数と考えれば

$$\frac{1}{z} = (-i)\sum_{n=0}^{\infty}\{i(z - i)\}^n = \sum_{n=0}^{\infty} -i^{n+1}(z - i)^n$$

を得る。これは (1) の形となっており、テーラー展開が得られたことになる。

### 4.1.2　ローラン展開：非正則関数の展開

ある関数 $f(z)$ が $D:\{z: r_1 < |z-z_0| < r_2\}$ で正則であるとき、$f(z)$ は $z_0$ を中心として

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-z_0)^n && (3)\\
A_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1)}} d\zeta \qquad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots && (4)
\end{aligned}
$$

と展開できる。これを**ローラン展開**と呼ぶ（考え方については教科書を参照いただきたい）。ローラン展開はテーラー展開を含む一般的な形である。ローラン展開も一意に決まる。

なお、ローラン展開において

$$
\sum_{n=-1}^{-\infty} A_n (z-z_0)^n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{-m}}{(z-z_0)^m}
$$

を**主部**という。

**（例）** $f(z)=\frac{1}{z-2}$ を $z_1$ を中心として展開しよう。この関数は $z=2$ に特異点を持っている。

展開を考える開円盤が $\{z:\ |z-z_1| < |2-z_1|\}$ 内であるなら、$f(z)$ は常に正則であるからテーラー展開すればよい（ローラン展開の主部はゼロである）。

$|z-z_1| < |2-z_1|$ であるから、$\frac{z-z_1}{2-z_1} < 1$ であることを利用して次のように展開できる。

$$
\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{(z_1-2)\left(1-\frac{z-z_1}{2-z_1}\right)}\\
&= \frac{-1}{2-z_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_1}{2-z_1}\right)^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(2-z_1)^{n+1}}(z-z_1)^n
\end{aligned}
$$

もし展開したい点 $z$ が $\{z:\ |z-z_1| > |2-z_1|\}$ にある場合、ローラン展開を行うことが必要である。

とはいっても、幾何学的に（式変形によって）展開結果を求める場合は、ほとんど同じ手順である。$\frac{2-z_1}{z-z_1} < 1$ であることを利用すれば、

$$
f(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-z_1)\left(1-\frac{2-z_1}{z-z_1}\right)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{z-z_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2-z_1}{z-z_1}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-z_1)^{n+1}}(2-z_1)^n \\
&= \sum_{m=-\infty}^{-1}\frac{1}{(2-z_1)^{m+1}}(z-z_1)^m
\end{aligned}
$$

なお、$z_1 = 2$ であるとき、展開結果は明らかに

$$
f(z) = \frac{1}{z-2} = (z-2)^{-1}
$$

そのものである。

## 4.2 特異点と留数

### 4.2.1 特異点の種類

関数 $f(z)$ が $z = z_0$ では正則でないが、その近傍では正則であるとき、$z_0$ を $f(z)$ の孤立特異点という。孤立特異点は、それを中心としたローラン展開の結果によって次の 3 種類に分けられる。

**(1)** 主部がゼロ：除去可能特異点

このとき、$\lim_{z\to z_0} f(z)$ が発散せずに存在する。

**(2)** 主部が有限項：極

このとき、

$$
f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-m}^{\infty} A_n(z-z_0)^n
$$

と形式的に書くことができる。このとき $z_0$ を $m$ 位の極という。なお、$\lim_{z\to z_0} f(z) \to \infty$ である。

**(3)** 主部が無限項：真性特異点

このとき、$\lim_{z\to z_0} f(z)$ は一意に決まらない。

### 4.2.2 留数

ある $f(z)$ が $z = z_0$ で孤立特異点を持つとする。このとき、$f(z)$ を $z_0$ を中心としてローラン展開した際の $n = -1$ のときの係数 $A_{-1}$ を**留数**といい、$Res_{z=z_0}\{f(z_0)\}$ もしくは $Res\, f(z_0)$ と書く。

ここで $z_0$ を中心とする十分小さい半径の円 $C$ について次式が成立する（コーシーの積分公式とほぼ同じ）。

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i Res_{z=z_0}\{f(z_0)\} \tag{5}$$

**留数定理** 単一閉曲線 $C$ の内部に $f(z)$ が $n$ 個の孤立特異点 $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$ を持ち、それら以外では正則であるならば

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res_{z=z_i}\{f(z_i)\} \tag{6}$$

#### 4.2.3 留数の求め方

留数はローラン展開により定義されているが、ローラン展開をいちいち考えたくないとき、以下のように求めることができる。

**特異点が除去可能** 留数はゼロ。

**特異点が一位の極** ローラン展開の結果は

$$f(z) = \frac{A_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n$$

なので、次式により求まる。

$$Res_{z=z_0}\{f(z_0)\} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

**特異点が $m$ 位の極** 次式により求まる。

$$Res_{z=z_0}\{f(z_0)\} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z)\right)$$

むろん $m = 1$ のときも成立する。

**特異点が真性特異点** ローラン展開しないと分からない。

**（例）** $f(z) = \frac{2}{bz^2 + 2az + b}$ の各特異点における留数を求めよう。

分母の多項式の解２つをそれぞれ $z_+,\ z_-$ と書くことにしよう。与式を部分分数に展開すれば次式を得る。

$$f(z) = \frac{2}{b(z_+ - z_-)} \left( \frac{1}{z - z_+} - \frac{1}{z - z_-} \right)$$

解の公式から $z_+ - z_- = \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ であるので、それぞれにおける留数は以下のとおり求まる。

$$Res\ f(z_+) = \lim_{z \to z_+} (z - z_+) f(z) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$Res\ f(z_-) = \lim_{z \to z_-} (z - z_-) f(z) = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

## 4.3 実定積分への応用

複素関数の周回積分を応用すると、原始関数の求められない実関数の定積分が計算可能になることがある。ここでは、3パターンの実例を介して応用方法を紹介する。

### 4.3.1 タイプ1

定積分が

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\, \sin\theta) d\theta \tag{7}$$

の形。ただし $f$ は有理関数で、$0 \leq \theta \leq 2\pi$ で連続であるとする。

ここで $z = e^{i\theta}$ と置くと、$z$ は原点中心・半径1の円周 $C$ を表す。また

$$\begin{cases} \cos\theta &= \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) &= \frac{1}{2}(z + z^{-1}) \\ \sin\theta &= \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) &= \frac{1}{2i}(z - z^{-1}) \end{cases}$$

であり、かつ

$$dz = \frac{dz}{d\theta} d\theta = ie^{i\theta} d\theta = iz\, d\theta$$

であるので、これらを (7) に代入することで (8) を得る。

$$I = \frac{1}{i} \int_C f\left(\frac{z + z^{-1}}{2},\ \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{z} dz \tag{8}$$

- もし $f\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\ \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{1}{z}$ が $C$ 内で正則であるならば、積分結果は0である。
- もし $r$ 個の特異点を持つならば、$I = 2\pi \sum_{n=1}^{r} Res\,[\frac{1}{z} f]_{z=z_n}$ である。ただし $z_n$ は $n$ 番目の特異点を表す。

**（例）** $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos\theta} d\theta \quad (a > b > 0)$ を求める。

この場合、$\frac{2}{i}\int_C \frac{1}{bz^2+2az+b} dz$ を求めれば良い。特異点のうち、$z_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ のみが $C$ 内にあるので、

$$Res\left[\frac{2}{bz^2 + 2az + b}\right]_{z=z_1} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

から

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos\theta} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

である。

#### 4.3.2 タイプ 2

定積分が

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \tag{9}$$

の形。ただし $f$ は有理関数で、分母の次数が分子のそれより 2 以上大きいとする。

このとき、図 1 のような積分経路を考えると、右辺第 1 項において $R \to \infty$ とすれば目的の積分となる。

$$\int_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_\Gamma f(z)dz \tag{10}$$

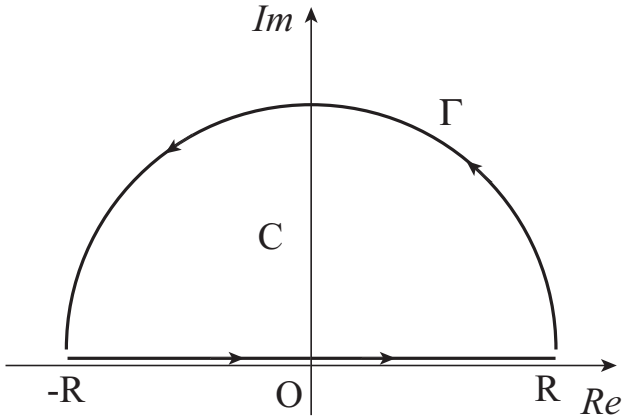


図 1: 実軸と半円 Γ による積分経路 C

積分経路 Γ 上では、$z = Re^{i\theta}$ として $0 \le \theta \le \pi$ であるので、積分変数を置換して

$$\int_\Gamma f(z)dz = iR\int_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$$

を得るが、ここで

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \le R\int_0^\pi \left|f(Re^{i\theta})\right| d\theta$$

が成立している。

ところで、仮定により分母は分子より次数が 2 以上大きいので、ある適当な定数 $M$ を用いて $R \to \infty$ で

$$\left|f(Re^{i\theta})\right| \le \frac{M}{R^2} \tag{11}$$

と書くことができる。これを先の式に代入してみると

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \le \lim_{R\to\infty} R\frac{M}{R^2} = 0$$

となり、積分経路 $\Gamma$ における積分値は 0 である。よって (12) を得る。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_C f(z)dz \tag{12}$$

留数定理から、$f(z)$ が上半面に $r$ 個の特異点 $z_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$ を持つとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{r} Res\, f(z_n)$$

である。

**（例）** $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$ を求めよう。

$$f(z) = \frac{1}{(z+ia)(z-ia)}$$

であるので、上半面に特異点 $z_1 = ia$ を持つ。よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi i\, Res\, f(z_1) = \frac{\pi}{a}$$

### 4.3.3 タイプ 3

定積分が

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx \tag{13}$$

の形。ただし $f$ は有理関数で、分母の次数が分子のそれより 1 以上大きいとする。

**タイプ 2** のときと同じ積分経路 $C$ を考えると、この場合も (14) の第 2 項で $R \to \infty$ とすることで求めるべき積分が現れる。

$$\int_C f(z)e^{iaz}dz = \int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}dx + \int_\Gamma f(z)e^{iaz}dz \tag{14}$$

積分経路 $\Gamma$ 上では $z = Re^{i\theta} = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ であるから、

$$\int_\Gamma f(z)e^{iaz}dz = iR\int_0^\pi f(e^{i\theta})e^{-Ra\sin\theta + iRa\cos\theta}e^{i\theta}\,d\theta$$

を得るが、ここで

$$\left|\int_\Gamma f(z)e^{iaz}dz\right| \le R\int_0^\pi \left|f(Re^{i\theta})\right| e^{-Ra\sin\theta}d\theta$$

が成立している。

仮定から、適当な定数 $M$ を用い $R \to \infty$ で

$$\left|f(Re^{i\theta})\right| \le \frac{M}{R} \tag{15}$$

と書ける。このことから $R >> 1$ において、$\sin\theta$ の対象性も利用して

$$\left|\int_\Gamma f(z)e^{iaz}dz\right| \leq M\int_0^\pi e^{-Ra\sin\theta}d\theta = 2M\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Ra\sin\theta}d\theta$$

を得る。ここで $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$ であることから

$$\left|\int_\Gamma f(z)e^{iaz}dz\right| < 2M\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}Ra\theta}d\theta = \frac{\pi M}{aR}(1-e^{-aR})$$

を得る。

$a > 0$ ならば $\lim_{R\to\infty} e^{-aR} = 0$ であるから

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma f(z)e^{iaz}dz\right| = 0$$

より

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_C f(z)e^{iaz}dz \tag{16}$$

と求まる。この場合、タイプ 2 と同様に、上半面の $r$ 個の特異点 $z_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$ について

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i\sum_{n=1}^{r} Res\ \left[f(z)e^{iaz}\right]_{z=z_n}$$

である。

もし $a < 0$ の場合は、下半面の $r$ 個の特異点 $z_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$ について

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = -2\pi i\sum_{n=1}^{r} Res\ \left[f(z)e^{iaz}\right]_{z=z_n}$$

である。

**（例）** $\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x-ib}dx$ を求めよう。ただし $a \neq 0,\ b > 0$ とする。

特異点は $z = ib$ であるので $a > 0$ であれば、積分値は $e^{-ab}$、$a < 0$ であれば積分値 0 となる。

なお、この結果から、$\lim_{b\to 0}$ において $a > 0$ ならば 1、$a < 0$ ならば 0 という**ステップ入力**を実現する関数となっている。