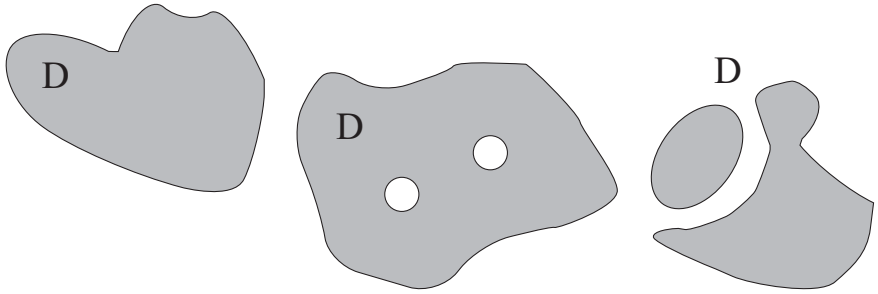
3　複素積分

3.1　複素積分の計算

3.1.1　単連結領域と複連結領域

ある領域 D が、その内部を通る曲線によって任意の２点をつなぐことができる**連結領域**であるとしよう。D 上での任意の単一閉曲線の内部が常に D の内部であるとき、D を**単連結領域**という。単連結でない連結領域を**複連結領域**という（図 1）。複連結領域とは、要するに単連結領域にドーナツの穴が開いたような領域である。

連結領域内に領域に含まれない点が１点あるだけでも、その領域は複連結領域になる。たとえば、「正則な領域」の内部に「特異点」があった場合、その領域は複連結領域である。



(a) 単連結領域　(b) 複連結領域　(c) 非連結な領域

図 1: 領域の区分

3.1.2　線積分

方向のある（始点と終点が決まっている）滑らかな曲線 C が $z = z(t) = x(t) + iy(t),\ a \leq t \leq b$ として定義されている。なお、向きを逆に考えるときは $-C$ と書くことにする。

この C を適当に n 分割することを考える。(1) の L_Δ が有界で L に等しいとき、C の長さが L であるという。

$$L_\Delta = \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| \tag{1}$$

さて、ここで C 上で連続な関数 $f(z)$ について (2) を考える。ここで ζ_k は区間 $[z_{k-1},\ z_k]$ 内の任意の点とする。

$$S_\Delta = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \tag{2}$$

いま、$|\Delta| = max\,|z_k - z_{k-1}|$ として $|\Delta| \to 0$ を考えたとき、分割の仕方や ζ_k のとり方によらずに S_Δ が収束する場合、$f(z)$ は C 上で**積分可能**であるという。これを (3) と書いて C **上の線積分**という。

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta = \int_C f(z)dz \tag{3}$$

定理 $\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z))\,dz = \alpha \int_C f(z)dz + \beta \int_C g(z)dz$、ただし $\alpha,\ \beta$ は定数

定理 $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$

定理 C を C_1 と C_2 に分割したとき、$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$

3.1.3 媒介変数表示

いま、$z(t) = x(t) + iy(t),\ f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とおく。これを (2) に代入する。

$$\begin{aligned} S_\Delta &= \sum_{k=1}^{n} u(x(\tau_k), y(\tau_k))[x(t_k) - x(t_{k-1})] - \sum_{k=1}^{n} v(x(\tau_k), y(\tau_k))[y(t_k) - y(t_{k-1})] \\ &\quad + i\sum_{k=1}^{n} u(x(\tau_k), y(\tau_k))[y(t_k) - y(t_{k-1})] + i\sum_{k=1}^{n} v(x(\tau_k), y(\tau_k))[x(t_k) - x(t_{k-1})] \end{aligned}$$

ここで線積分の定義と同様に $|\Delta| \to 0$ とすると次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_C u(x,y)dx - \int_C v(x,y)dy + i\int_C u(x,y)dy + i\int_C v(x,y)dx \\ &= \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (u\,dy + v\,dx) \\ &= \int_b^a \left(u\frac{dx}{dt} - v\frac{dy}{dt}\right)dt + i\int_b^a \left(u\frac{dy}{dt} + v\frac{dx}{dt}\right)dt \\ &= \int_b^a (u + iv)\left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right) \\ &= \int_b^a f(z)\frac{dz}{dt}dt \end{aligned}$$

すなわち、$z = z(t)$ と書かれてる場合、媒介変数 t による微分も可能である。これを**媒介変数表示**という。

3.1.4 経路に依存する積分・しない積分

まず、次の例を考えてみよう（図 2)。

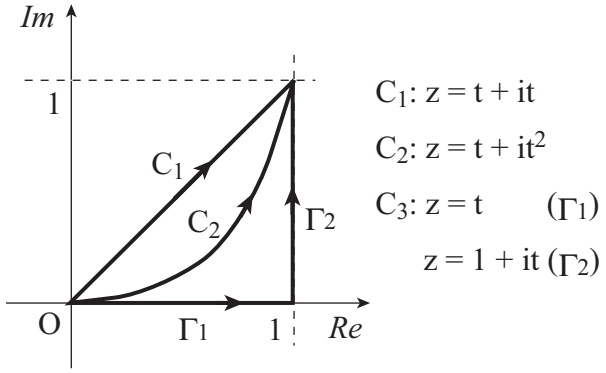


図 2: ３種の積分経路

（例１） $f(z) = z^2$、積分経路 $C_1,\ C_2,\ C_3$ を考える。

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1} z^2\,dz &= \int_0^1 (t+it)^2(1+i)\,dt \;=\; (1+i)^3\int_0^1 t^2\,dt \;=\; \frac{2}{3}(i-1)\\
\int_{C_2} z^2\,dz &= \int_0^1 t^2(1+it)^2(1+2it)\,dt \;=\; \frac{2}{3}(i-1)\\
\int_{C_3} z^2\,dz &= \int_{\Gamma_1} z^2\,dz + \int_{\Gamma_2} z^2\,dz \;=\; \frac{2}{3}(i-1)
\end{aligned}
$$

（例２） $g(z) = Re\,z$、積分経路 $C_1,\ C_2,\ C_3$ を考える。

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1} g(z)\,dz &= \int_0^1 t(1+i)\,dt \;=\; \frac{1+i}{2}\\
\int_{C_2} g(z)\,dz &= \frac{1}{2} + i\frac{2}{3}\\
\int_{C_3} g(z)\,dz &= \frac{1}{2} + i
\end{aligned}
$$

このように、複素関数の積分では、経路によって積分結果が異なる場合とそうでない場合がある。

いま、領域 D 上で連続な関数 $f(z)$ を考える。$f(z)$ が D 上で１価関数であり、$\frac{dF(z)}{dz} = f(z)$ となるような関数 $F(z)$ を持つとき、この $F(z)$ を $f(z)$ の**原始関数**という。

もし、関数 $f(z)$ が原始関数 $F(z)$ を持つならば、積分結果は (4) となり、積分経路に依存しない。

$$
\int_C f(z)\,dz \;=\; \int_b^a f(z(t))\frac{dz}{dt}dt \;=\; \int_b^a \frac{d}{dt}F(z(t))dt \;=\; F(z(b)) - F(z(a)) \qquad (4)
$$

先の例では、$f(z) = z^2$ が原始関数 $F(z) = z^3$ を持つのに対し、$Re\,z$ は原始関数を持たないことから、このことが理解できる。

なお、これ以降 $\int_C f(z)dz = \int_\beta^\alpha f(z)dz$ と書くことがる。ただし、$\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$ である。

3.2 円周上の積分

3.2.1 円周上の積分（単一閉曲線上での積分）

いま、$f(z) = (z-\alpha)^n$（n は整数）という関数を、中心 α、半径 R の円周 C 上で積分することを考える。C は $z(\theta) = \alpha + Re^{i\theta}$ と媒介変数表示できる。その積分 I は (5) となる。

$$I \;=\; \int_C f(z)dz \;=\; \int_0^{2\pi} R^n e^{in\theta} Rie^{i\theta} d\theta \;=\; iR^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta \tag{5}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
n \neq -1 \quad &\rightarrow \quad e^z \text{は周期}\, 2\pi \text{であることから} \\
&\qquad\quad I = iR^{n+1}\left[\frac{1}{i(n+1)}e^{i(n+1)\theta}\right]_0^{2\pi} = 0 \\
n = -1 \quad &\rightarrow \quad n+1 = 0 \text{ より} \\
&\qquad\quad I = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i
\end{aligned}$$

つまり、

$$\int_C (z-\alpha)^n\, dz = \begin{cases} 2\pi i & (n=-1) \\ 0 & (n \neq -1) \end{cases} \tag{6}$$

積分結果は半径に依存せず、被積分関数によってのみ決まる。

3.2.2 コーシーの積分定理

ある複素関数 $f(z)$ が単連結領域 D 上で正則であるとき、D 内の任意の単一閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z)dz = 0$$

である。

定理 ある領域 D 上で単一閉曲線 C をとる。C 上と C で囲まれた領域で $f(z)$ が正則であれば、

$$\int_C f(z)dz = 0$$

である。

定理 複連結領域 D において、任意の単一閉曲線 C に対し、その経路内にある領域外の境界を囲む全ての単一閉曲線 C_n（$n = 1, 2, \cdots$）をとれば、D 上で正則な関数 $f(z)$ について

$$\int_C f(z)dz = \sum_n \int_{C_n} f(z)dz$$

が成り立つ。

幾何学的に考えると、図 3 が成り立っている。

(a) 複連結領域と積分経路内の「穴」　(b) 「穴」を逆周りに廻る積分経路と合成

図 3: 複連結領域での周回積分

（例） $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+4)}$、積分経路 C：$|z + 2i| = 3$

$z = 1,\ -2i$ が C 内に含まれるので

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_C \left(\frac{1}{5}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{4(2+i)}\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{4(2-i)}\frac{1}{z+2i} \right) dz \\
&= \frac{1}{5}\int_{C_1} \frac{1}{z-1}dz - \frac{1}{4(2+i)}\int_{C_2} \frac{1}{z-2i}dz \\
&= \frac{2\pi i}{5} - \frac{2\pi i}{4(2+i)} = \frac{2-i}{10}\pi i
\end{aligned}$$

3.2.3 コーシーの積分公式

いま、C を単一閉曲線、$f(z)$ を C 上および C 内で正則な関数とする。このとき、C 内の任意の点 z_0 で (7) が成立する。

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz \tag{7}$$

つまり、正則な関数の $z = z_0$ における値は、その点まわりの閉曲線を積分経路とする積分値で決まる。複素積分の世界では、ある点の値とその点周りの周回積分値に関係式が成り立っている。

ところで、(7) 左辺の被積分関数を新たに $g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$ と考え直してみると、この関数は $z = z_0$ で特異点を持つ（周回積分が値を持つ）ことが分かる。これを利

用すれば、いくつかの特異点を含む積分経路での周回積分値を、実際に積分計算を行うことなく知ることができる。

（例） 関数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z^2+4)}$ を積分経路 $C:|z+2i|=3$ で周回積分する。C には $f(z)$ の特異点のうち、$z=1,\ z=-2i$ が含まれている。ここで $C_1,\ C_2$ をそれぞれ C の内側にあって $z=1,\ z=-2i$ まわりの積分経路とすると、前節での定理より次式の関係が得られる。

$$\int_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz$$

積分経路 C_1 において、

$$\int_{C_1}\frac{1}{(z-1)(z^2+4)}dz=\int_{C_1}\frac{\frac{1}{z^2+4}}{z-1}dz=\int_{C_1}\frac{g_1(z)}{z-1}dz$$

と考えれば、C_1 において $g_1(z)$ は正則であるので

$$\int_{C_1} f(z)dz=2\pi i g_1(z=1)=\frac{2}{5}\pi i$$

と積分計算をすることなく値を求めることができる。C_2 においても同様に

$$\int_{C_2} f(z)dz=2\pi i g_2(z=-2i)=-\frac{2+i}{10}\pi i$$

と求まる。ここで $g_2(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2i)}$ である。以上から

$$\int_C f(z)dz=\frac{2-i}{10}\pi i$$

と積分結果を求めることができた。

これを整理すれば (8) の式を得る。これは**コーシーの積分公式**と呼ばれる。

$$\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0) \tag{8}$$

これを利用して積分計算を行うには

- 積分を特異点 $(z_1,\ z_2,\ \cdots)$ 毎の周回積分に分割
- $f(z)=\frac{g_i(z)}{z-z_i}$ としてコーシーの積分公式を利用

することが便利である。ところで、この方法では $g_i(z)$ は正則でなくてはいけない。例えば、$f(z)=\frac{g_i(z)}{(z-z_i)^n}$ の形をした関数ではそのまま適用できない。しかしながら、次のようなコーシーの積分公式を拡張する定理が知られており、これを利用することで計算が可能である。

定理 関数 $f(z)$ は D 上で正則、かつ任意次数の正則な導関数を持つ場合、D 内の任意の点 z_0 における n 次導関数は、z_0 を内部に含み、その周上および内部が D に含まれる単一閉曲線 C に沿った積分により (9) と表すことができる。

$$f^n(z_0) = \frac{d^n}{dz^n} f(z)\bigg|_{z=z_0} = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \tag{9}$$

ただし、$n = 1, 2, 3, \cdots$ である。

なお (9) を積分の式として書き直せば (10) である。

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{n-1}(z_0) \tag{10}$$

なお、複素関数は１回微分可能であれば何回でも微分可能、１回微分が正則なら何回微分したものも正則、という便利な性質があるため、微分可能性は１回調べればよい。

（例） $f(z) = \frac{(z-1)}{(z-2)^2(z+1)}$ を積分経路 $C:\ |z| = 3$ で周回積分する。ただし $C_1,\ C_2$ はそれぞれ特異点 $z = -1,\ z = 2$ まわりの単一閉曲線であるとする。

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz \\
\int_{C_1} f(z)dz &= -\frac{4}{9}\pi i \quad \text{（既出）} \\
\int_{C_2} f(z)dz &= \int_{C_2} \frac{g_2(z)}{(z-2)^2}dz \quad g_2(z) = \frac{z-1}{z+1} \\
&= \frac{2\pi i}{1!} g_2'(2) \ = \ \frac{4}{9}\pi i \\
\text{よって} \int_C f(z)dz &= 0
\end{aligned}$$