2　複素微分

2.1　複素平面上の図形

2.1.1　複素曲線

連続実関数 $x(t),\ y(t)\ \ (a \leq t \leq b)$ を用いて、複素平面上の曲線 $z(t)$ を (1) と定義する。$z(a),\ z(b)$ をそれぞれ始点、終点といい、両者が等しいものを閉曲線という。$a \leq t < t' \leq b$ において常に $z(t) \neq z(t')$ が成立するとき、単一曲線という。

$$\{z \in \boldsymbol{C};\ z = z(t) = x(t) + iy(t),\ a \leq t \leq b\} \tag{1}$$

$x(t),\ y(t)$ 共に微分可能で、導関数が連続であるとき、滑らかな曲線という。

2.1.2　曲線の表現

複素数 z は複素平面上で点（ベクトル）を表しているので、図形標記をベクトル的に行うことがある。例えば、$z_0 \in \boldsymbol{C},\ r \in \boldsymbol{R}$ の定数に対して $z \in \boldsymbol{C},\ |z - z_0| = r$ を満たす集合は円である。

$z = x + iy,\ z_0 = x_0 + iy_0$ として

$$\begin{aligned} |z - z_0| &= |(x - x_0) + i(y - y_0)| \\ &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \\ &\rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \end{aligned}$$

2.1.3　近傍と集合

$z,\ z_0 \in \boldsymbol{C}$ が $\varepsilon > 0$ について $|z - z_0| < \varepsilon$ であるとき、z は z_0 の ε 近傍（もしくは単に近傍）という。複素平面上に集合 $S \in \boldsymbol{C}$ をとったとき、ε 近傍の含まれ方によって点を内点・外点・境界点に区分できる。内点とは、全ての ε 近傍が集合に含まれるような ε が存在する点、外点とは、全ての ε 近傍が集合に含まれないような ε が存在する点、境界点とは、どのような ε を選んでも、ε 近傍に集合に含まれる要素とそうでない要素が混在する点をいう。

S の点が全て内点であるような集合 S を開集合といい、S の補集合が開集合であるような集合を閉集合という。

S の全ての点が、原点中心半径 R の円に含まれる場合、その集合は有界であるという。任意の 2 点が常に集合内を通る曲線で結ぶことができるとき、その集合を連結集合という。領域とは、連結な開集合をいう。

2.2 複素関数の極限

関数 $w = f(z)$ がある点 z_0 近傍のあらゆる点で定義されていたとする。ここで z をどのように z_0 に近づけても、$f(z)$ がある値 w_0 に近づくとき、w_0 を $f(z)$ の極限値といい (2) のように書く。

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \tag{2}$$

唯一性： 極限値 w_0 が存在するなら、ただ１つである。

連続： $w_0 = f(z_0)$, $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ であるとき、$f(z)$ は z_0 で連続であるという。$f(z)$ がある領域 R で常に連続であるとき、単に $f(z)$ は R で連続であるという。

いま、$z = x + iy$ として、$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と書くことにする。

定理 $f(z)$ が $z_0 = x_0 + iy_0$ で連続である必要十分条件は、実関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ が共に $(x_0,\ y_0)$ で連続であることである。

定理 $\lim_{z \to z_0} f_1(z) = w_1, \quad \lim_{z \to z_0} f_2(z) = w_2$ であるとき、以下が成立する。

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} (f_1(z) \pm f_2(z)) &= w_1 \pm w_2 \\
\lim_{z \to z_0} (f_1(z) f_2(z)) &= w_1 w_2 \\
\lim_{z \to z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} &= \frac{w_1}{w_2}
\end{aligned}$$

定理 $f_1(z),\ f_2(z)$ が共に z_0 で連続であるとき、

$$f_1(z) \pm f_2(z), \quad f_1(z) f_2(z), \quad \frac{f_1(z)}{f_2(z)} \quad (f_2(z) \neq 0)$$

も z_0 で連続である。

2.3 複素関数の微分

2.3.1 微分可能

ある $f(z)$ について

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{3}$$

が存在するとき、$f(z)$ は z_0 で微分可能であるという。また、この極限値を微分係数と呼ぶ。

2.3.2　正則

$f(z)$ が z_0 だけでなくその近傍でも微分可能であるとき、$f(z)$ は z_0 で正則であるという。微分可能であることと正則であることは一致しないので注意。

ある領域 D の各点で微分可能であるとき、その関数は D において正則であるという。このとき、各点での微分係数を対応させ、導関数 $f'(z)$ もしくは $\frac{d}{dz}f(z)$ を定義する。

（例）　$f(z) = z^3$ について

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^3 - z^3}{\Delta z} = 3z^2$$

であるが、これは複素平面全域で値を持つ。すなわち、この関数は複素平面全体で正則であり、導関数を $f'(z) = 3z^2$ と定義できる。■

なお、$f(z) = z^n$ についても、実関数と同様に

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^{n-k} (\Delta z)^{k-1} \right\} = nz^{n-1}$$

であり、複素平面全体で正則である。

なお、複素平面全体で正則である関数を整関数と呼ぶことがある。

2.3.3　導関数の演算

導関数に関する演算は、実関数と同様に成立する。いま、$f(z),\ g(z)$ が D で正則であるとし、$\alpha,\ \beta \in \boldsymbol{C}$ とするとき、以下が成立する。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left(\alpha f(z) \pm \beta g(z)\right)_{z=z_0} &= \alpha f'(z_0) \pm \beta g'(z_0) \\
\frac{d}{dz}\left(f(z)g(z)\right)_{z=z_0} &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0) \\
\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)_{z=z_0} &= \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2} \quad (g(z_0) \neq 0)
\end{aligned}$$

また合成関数 $h(z) = g(f(z))$ について

$$\begin{aligned}
h'(z_0) &= g'(w_0)f'(z_0) \\
&= \left[\frac{dg(w)}{dw}\right]_{w=w_0} \left[\frac{df(z)}{dz}\right]_{z=z_0}
\end{aligned}$$

である。

2.4 コーシー・リーマンの関係式

任意の関数の微分可能性を判定する定理として、コーシー・リーマンの関係式が知られている。

定理 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が点 $z_0 = (x_0,\ y_0)$ で微分可能となる必要十分条件は、$u(x,y),\ v(x,y)$ が共に z_0 で微分可能であり、かつ

$$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0), \quad u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \tag{4}$$

を満たすことである。ただし、$u_x,\ v_y$ 等の記号はそれぞれ u を x で偏微分、v を y で偏微分した偏導関数を表す。ここで (4) はコーシー・リーマンの関係式と呼ばれる。

なお、このとき

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$$

が成立する。

定理 D 上で定義された $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が D で正則である条件は、$u,\ v$ が D の各点で微分可能で、かつコーシー・リーマンの式が成立することである。

定理 D 上で定義された $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ において、$u,\ v$ が D の各点で偏微分可能であり、偏導関数 $u_x,\ u_y,\ v_x,\ v_y$ が連続かつコーシー・リーマンの関係式を満足するとき、$f(z)$ は D で正則である。

（例） $f(z) = e^{-y}(\cos x + i\sin x)$ について考える。$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とおくと、$u(x,y) = e^{-y}\cos x,\ v(x,y) = e^{-y}\sin x$ であり、$x,\ y$ による偏微分が可能である。その偏微分結果は

$$\begin{array}{rclcrcl} u_x & = & -e^{-y}\sin x & , & u_y & = & -e^{-y}\cos x \\ v_x & = & e^{-y}\cos x & , & v_y & = & -e^{-y}\sin x \end{array}$$

となり、連続かつコーシー・リーマンの関係式を満たす。よって $f(z)$ は複素平面全体で正則な関数である。

なお、$f'(z) = u_x + iv_x$ であるので、$f(z)$ の導関数は $f'(z) = if(z)$ と求まる。

（例） $f(z) = |z|^2$ は明らかに複素平面全体で連続である。$f(z) = x^2 + y^2$ より $u(x,y) = x^2 + y^2,\ v(x,y) = 0$ である。

偏導関数を求めると、$u_x = 2x,\ u_y = 2y,\ v_x = v_y = 0$ である。偏導関数は連続であるが、コーシー・リーマンの関係式を $z = 0$ でしか満たさない。よってこの関数は $z = 0$ でのみ微分可能であり、いたるところ正則ではない。

2.5 特異点

ある関数 $f(z)$ が z_0 で正則ではないが、その近傍では正則であるとき、z_0 を $f(z)$ の特異点という。

（例）$f(z) = \frac{1}{z}$ について、$z \neq 0$ で正則であるが $z = 0$ でのみ正則ではない。よって $z = 0$ が $f(z)$ の特異点である。

2.6 調和関数

2.6.1 調和関数

ある実関数 $h(x, y)$ が D 上で定義されているとする。$h(x, y)$ が D 上で 2 回連続微分可能で、かつ

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \tag{5}$$

を満たすとき、$h(x, y)$ を D における調和関数という。なお (5) はラプラスの偏微分方程式として知られている。

定理 領域 D において正則な関数の実部・虚部を構成する実関数は、共に D において調和関数となっている。

2.6.2 共役調和関数

２つの調和関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ がコーシー・リーマンの関係式を満足するとき、v を u の共役調和関数という。

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と書くとき、u, v を任意に選んでは $f(z)$ を正則にすることができないが、共役調和関数を見つけることで正則な関数を生成できる。

（例） $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$ について考えると、$u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$ である。偏導関数は $u_x = 2x$, $u_y = -2y$, $v_x = 2y$, v_y $2x$ となり、コーシー・リーマンの関係式を満足する。さらに $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $v_{xx} + v_{yy} = 0$ が成立しているので、v は u の共役調和関数である。

v が u の共役調和関数であっても、一般に u が v の共役調和関数になることはないので注意が必要。先の例を用いて $f(z) = v + iu = 2xy + i(x^2 - y^2)$ とすると、$f(z)$ は正則な関数にならない。コーシー・リーマンの関係式において u, v を入れ替えると、必ずしも等式が成立しないためである。

2.7 リーマン面

複素関数では、多価関数が多く存在する。例えば $w = z^{\frac{1}{2}}$ を考えると、$z_1 \neq 0$ に対して $w_1 = |z_1|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta_1}{2}}$, $w_2 = |z_1|^{\frac{1}{2}} e^{i(\frac{\theta_1}{2}+\pi)}$ という 2 点への**分枝**が生じる。ただし、$\theta_1 = Arg\, z_1$ とし、w_1 が主値である。

一般に、複素平面上のある点まわりに一周したとき、それに応じて多価関数の分枝が別のものに移るとき、その点を $w = f(z)$ の分枝点という。$w = z^{\frac{1}{2}}$ の場合は原点が分枝点である。

ここで、z_1 と絶対値が同じで、$\theta_2 = \theta_1 + 2\pi$ なる偏角をもつ複素数を z_2 とおく。z_1 と z_2 は複素平面上では同一の点に対応するのに、$z_2^{\frac{1}{2}}$ の主値は w_2 に対応する。

このように、ある複素関数の分枝について、それぞれを主値とする複素数を用意し、関数の出力を主値のみ考える一価関数とすれば、微分・積分・テーラー展開などで扱いが容易になる。

この場合、元の複素平面においては、偏角が 2π を超えることになる。これについて、あたかも複数の面が折り重なっているかのような、多重構造の平面を考えると、この多重構造上の複素数に対して、多価関数が一価関数であるかのように扱うことができる。

この多重平面構造全体のことをリーマン面 (図 1) と呼び、平面を $\Pi_1, \Pi_2, \cdots$ と名づける。

なお、面のつながり部分を分枝切断線という。この切断線は一意には決まらない。

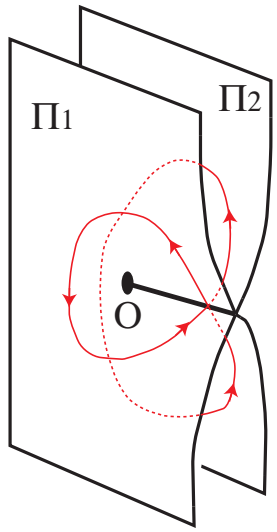

図 1: 2 価関数の場合のリーマン面