1　複素数

1.1　複素数の記述

- 記号

$$
\begin{aligned}
z &= x + iy \quad \text{大小を定義できない} \\
x &= Re\, z \\
y &= Im\, z \\
x = 0 &\rightarrow \text{純虚数} \\
i^2 &= -1
\end{aligned}
$$

  $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ とすると、$x_1 = x_2$ かつ $y_1 = y_2$ のときのみ $z_1 = z_2$ である。

- 交換則が成立

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\
z_1 z_2 &= z_2 z_1
\end{aligned}
$$

- 結合則が成立。

$$
\begin{aligned}
(z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3) \\
(z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3)
\end{aligned}
$$

- 分配則が成立。

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

- 絶対値：大小あり。

$$
\begin{aligned}
|z| &= |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \\
|z| &\geq 0
\end{aligned}
$$

- 共役複素数：$z = x + iy$ とすると

$$
\begin{aligned}
\bar{z} &= x - iy \\
x &= \frac{z + \bar{z}}{2} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}
\end{aligned}
$$

1.2　オイラーの公式

$x \in \Re$ として e^x をマクローリン展開すると (1) となる。

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots \tag{1}$$

この展開結果は複素数 z についても成立することが知られている。

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k!} + \cdots \tag{2}$$

ここで $z = iy$（純虚数）とすると、

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{iy^2}{2} + \cdots + \frac{iy^{2k}}{(2k)!} + \frac{iy^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \cdots\right) \\ &\quad + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}\right) + i\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

と、展開結果が三角関数のそれの和と一致する。よって (3) が成立する。これをオイラーの公式と呼ぶ。

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{3}$$

1.3　複素平面

- 複素平面：$z = x + iy$ について $(x,\, y)$ をとる平面。
- 三角不等式が成立：$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$。
- 極形式：複素平面上の極座標形式で複素数を表す

  $$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

  と書けるので、オイラーの公式と合わせて

  $$\begin{aligned} z &= x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= re^{i\theta} \end{aligned}$$

  と書ける。これを極形式という。ここで $r = |z|$ であり、θ を偏角と呼ぶ。なお、$z = 0$ では偏角が決まらないので、$z \neq 0$ と仮定しておく。

- 偏角 $\theta = arg\, z = arctan \frac{y}{x}$ である。$-\pi < \theta \leq \pi$ に θ の範囲を限定したとき、これを $arg\, z$ の主値といい $Arg\, z$ と書く。正確には、$arg\, z = Arg\, z + 2n\pi$（$n$ は任意の整数）である。

1.4 三角関数

オイラーの公式から (4) が成立するので、三角関数は (5) と表現できる。さらにこれを複素数に拡張し (6) と定義すると、微分関係が実関数と同様に成立する。さらに正接・余接を (7) と定義すれば、これらに関する微分関係も実関数同様成立する。

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{cases} \quad (x \in \Re) \tag{4}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{5}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{6}$$

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z, \quad \frac{d}{dz} \sin z = \cos z$$

$$\begin{aligned} \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad &, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \\ \sec z = \frac{1}{\cos z} \quad &, \quad \mathrm{cosec}\, z = \frac{1}{\sin z} \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \tan z = \sec^2 z \quad &, \quad \frac{d}{dz} \cot z = -\mathrm{cosec}^2\, z \\ \frac{d}{dz} \sec z = \sec z \tan z \quad &, \quad \frac{d}{dz} \mathrm{cosec}\, z = -\mathrm{cosec}\, z \cot z \end{aligned}$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z$$

なお、三角関数は周期 2π であるので、$\sin z_1 = \sin z_2, \cos z_1 = \cos z_2$ の解は $z_1 = z_2 + 2n\pi$（n は任意の整数）となる。

1.5　双曲線関数

双曲線関数とは、(8) のように定義される周期 $2\pi i$ の関数である。微分関係などは実関数と同じである。

$$\begin{array}{rclcrcl} \cosh z &=& \frac{e^z+e^{-z}}{2} & & \sinh z &=& \frac{e^z-e^{-z}}{2} \\ \tanh z &=& \frac{\sinh z}{\cosh z} & & \coth z &=& \frac{1}{\tanh z} \\ \mathrm{sech}\ z &=& \frac{1}{\cosh z} & & \mathrm{cosech}\ z &=& \frac{1}{\sinh z} \end{array} \tag{8}$$

なお、定義式から明らかなように、三角関数と双曲線関数の間には次の関係が成りたつ。

$$\begin{array}{rclcrcl} \cosh(iz) &=& \cos z & & \sinh(iz) &=& i\sin z \\ \cos(iz) &=& \cosh z & & \sin(iz) &=& i\sinh z \end{array} \tag{9}$$

1.6　対数関数

指数関数 $z = e^w$ の逆関数 $w = f^{-1}(z)$ として、対数関数 $w = \log z$ を定義する。
$z = re^{i\theta}$, $w = u + iv$ とおくと、上記の関係は

$$re^{i\theta} = e^u e^{iv}$$

であるので、$r = e^u$, $\theta = v + 2n\pi$（n は任意の整数）となる。よって

$$w \ = \ \log z \ = \ log|z| + i\mathrm{arg}\, z$$

と表される。対数関数は多価関数であることに注意が必要である。

1.7　ド・モアブルの公式

オイラーの公式から

$$\begin{aligned} z^n &= \left(re^{i\theta}\right)^n \\ &= r^n e^{in\theta} \end{aligned}$$

であるので、(10) が成り立つ。これをド・モアブルの公式と呼ぶ。

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \tag{10}$$

1.8　n 乗根

n を自然数とし、$z_1^n = z_2$ が成立するとき、z_1 を z_2 の n 乗根という。

いま、$z_1,\ z_2$ をそれぞれ $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ と置けば（$r_1,\ r_2$ は正の実数、$\theta_1,\ \theta_2$ は実数)、ド・モアブルの公式から

$$r_1^n = r_2, \quad n\theta_1 = \theta_2 + 2m\pi$$

である。ただし、m は任意の整数である。よって

$$r_1 = \sqrt[n]{r_2}, \quad \theta_1 = \frac{\theta_2}{n} + \frac{2m\pi}{n}$$

と求まる。つまり、z_2 の n 乗根は、原点を中心とし半径 $\sqrt[n]{r_2}$ の円に内接する正 n 角形の頂点の集合として得られる。これらを (11) のように書くことにする。

$$z_1^{(m)} = \sqrt[n]{r_2}\left\{\cos\left(\frac{\theta_2}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_2}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right)\right\} \tag{11}$$

ここで、θ_2 を主値 $\Theta_2 = Arg\,\theta_2$ としたときを

$$z_1^{(0)} = \sqrt[n]{r_2}\left\{\cos\left(\frac{\Theta_2}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\Theta_2}{n}\right)\right\}$$

と書くとき、この $z_1^{(0)}$ を $z_2^{1/n}$ の主値と呼ぶ。

1.9 複素関数

1.9.1 有理関数

複素平面の部分空間 $S \subset C$ について、$z \in S$ と $w \in S$ の対応関係を $w = f(z)$ のように表したものを複素関数という。このとき、S を定義域という。

ある複素関数 $q(z)$ が、2 つの複素多項式 $p_1(z),\ p_2(z)$ を用いて (12) と定義されているとしよう。このような形で表現される関数を、有理関数という。

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{p_1(z)}{p_2(z)} \qquad (12) \\ p_1(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \\ p_2(z) &= b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m \\ &\quad (a_k,\ b_k \in C) \end{aligned}$$

このような関数は、$p_2(z) = 0$ なる z で値を持たないが、このような z を特異点という。

1.9.2 複素関数による写像

複素関数 $\frac{1}{z}$ について考えてみると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= \frac{1}{r}\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right) \end{aligned}$$

よって $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg z$ であり、$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r^2}|z|$ である。つまり、この関数はある複素数 z を、複素平面上で実軸に対して対象な偏角で、絶対値が $1/r^2$ となる位置に移す写像になっている。

1.9.3 一次変換

複素有理関数は、複素平面間での写像を表していることがわかった。ここで (13) のように１次式から構成される有利関数について考えてみよう。

$$w \ = \ f(z) \ = \ \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0 \tag{13}$$

この関数も何らかの写像を表しているのだが、これを一次変換と呼ぶ。逆関数

$$z \ = \ f^{-1}(w) \ = \ \frac{dw-b}{-cw+a} \tag{14}$$

も一次変換になっている。複数の一次変換 $f_1(z), f_2(z)$ による合成関数 $w = f_1(f_2(z))$ としても、性質は失われない。

一次変換は、次の３種の基本変換の組み合わせに分解することができる。

$w = z + \alpha$ 平行移動

$w = \beta z$ $|w| = |\beta||z|, \arg w = \arg\beta + \arg z$ であることから、z と原点の距離を $|\beta|$ 倍に伸ばし、$\arg\beta$ だけ正方向に回転

$w = 1/z$ $|w| = |z|^{-1}, \arg w = \arg\bar{z} = -\arg z$ であることから、$|z|^{-1}$ を半径とする円周上を、実軸より z の偏角分だけ負の方向に回転