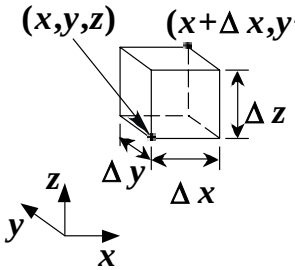
3･3運動量収支(P.17)



微小検査体積についての運動量の収支をとる

単位時間に

入る量－出る量＋増加する量＝変化率
(圧力･重力によるもの)

微小検査体積の場合

これまで(配布資料A2)との共通点

I.粘性による出入り
II.流れに伴う出入り(対流)
III.重力･圧力による増加(場合により減少)

により運動量が変化すること

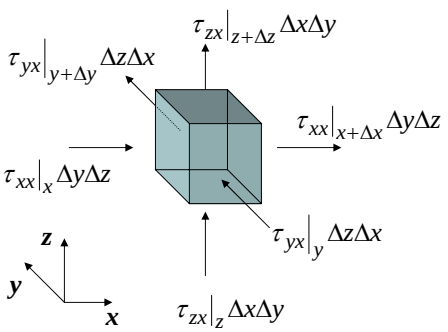
相違点

･運動量が3成分(x,y,zの3方向)であること
･それぞれの成分がx,y,zの3方向に移動すること

3･3･1一般的な運動量収支

以下は運動量のx方向成分の移動について

I.粘性による出入り



粘性による応力τ：x,y,z軸に垂直な面
全てにはたらく

応力=粘性による運動量移動流束

↓

x軸に垂直な面($x=x$)を通り
単位時間に入る

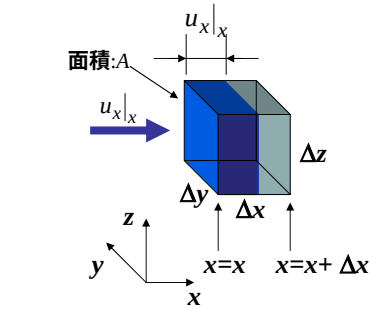
運動量：$\tau_{xx}|_{x}\Delta y\Delta z$

x軸に垂直な面($x=x+\Delta x$)を通り
単位時間に出る

運動量：$\tau_{xx}|_{x+\Delta x}\Delta y\Delta z$

y, z軸方向の入る量，出る量は図に示すとおり

II.流れに伴う出入り（対流）



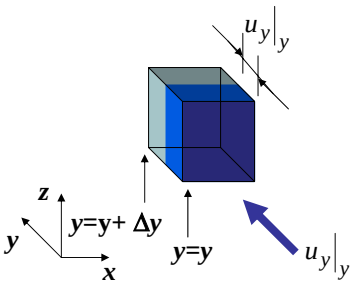
x軸に垂直な面($x=x$)を通り単位時間に入る

体積：$u_x|_x A = u_x|_x \Delta y \Delta z$　質量：$\rho u_x|_x \Delta y \Delta z$

運動量のx成分：$\rho u_x^2|_x \Delta y \Delta z$

x軸に垂直な面($x=x+\Delta x$)を通り単位時間に出る

運動量のx成分：$\rho u_x^2|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$



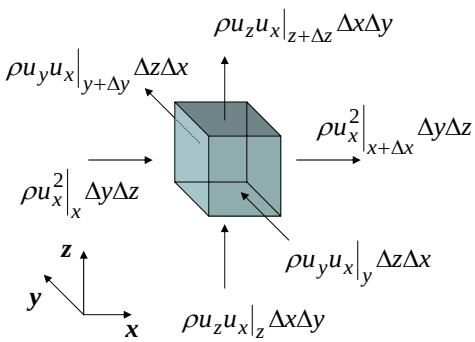
y軸に垂直な面($y=y$)を通り単位時間に入る

体積：$u_y|_y \Delta z \Delta x$　質量：$\rho u_y|_y \Delta z \Delta x$

運動量のx成分：$\rho u_y u_x|_y \Delta z \Delta x$

y軸に垂直な面($y=y+\Delta y$)を通り単位時間に出る

運動量のx成分：$\rho u_y u_x|_{y+\Delta y} \Delta z \Delta x$

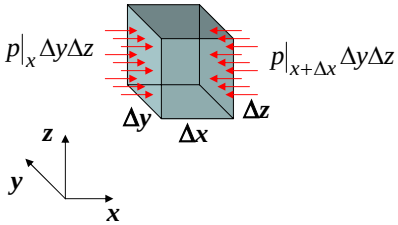


z軸方向の入る量，出る量を併せて左に図示

対流による運動量x方向成分の移動流束：

ρu_x^2，$\rho u_y u_x$，$\rho u_z u_x$

III.重力･圧力による増加



圧力：x軸方向にかかるもののみ考慮

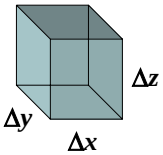
$$p|_x \Delta y \Delta z - p|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z = (p|_x - p|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z$$

重力：重力のx方向成分をg_xとすると

$$\underline{\rho \Delta x \Delta y \Delta z} g_x = \rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z$$

検査体積内の流体の質量

※x軸と鉛直のなす角をαとすると $g_x = g\cos\alpha$



変化率

微小検査体積内の運動量のx方向成分：$\rho u_x \Delta x \Delta y \Delta z$

その時間変化率：$\dfrac{\partial(\rho u_x \Delta x \Delta y \Delta z)}{\partial t} = \dfrac{\partial(\rho u_x)}{\partial t}\Delta x \Delta y \Delta z$

以上を整理して収支式を立てる

運動量のx方向成分の収支式：変化率=入る量－出る量＋増加する量

長くなるのでいくつかにわけ，それぞれあらかじめ体積 $\Delta x \Delta y \Delta z$ で割ったのち整理する。

変化率 $\dfrac{\partial(\rho u_x)}{\partial t}\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow \dfrac{\partial(\rho u_x)}{\partial t}$

I.粘性 $\tau_{xx}\big|_x \Delta y \Delta z - \tau_{xx}\big|_{x+\Delta x}\Delta y \Delta z \rightarrow \dfrac{\tau_{xx}\big|_x - \tau_{xx}\big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} \rightarrow -\dfrac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}$

$$\tau_{yx}\big|_y \Delta z \Delta x - \tau_{yx}\big|_{y+\Delta y}\Delta z \Delta x \rightarrow -\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$$

$$\tau_{zx}\big|_z \Delta x \Delta y - \tau_{zx}\big|_{z+\Delta z}\Delta x \Delta y \rightarrow -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

II.対流

$$\rho u_x^2\big|_x \Delta y \Delta z - \rho u_x^2\big|_{x+\Delta x}\Delta y \Delta z \rightarrow \frac{\rho u_x^2\big|_x - \rho u_x^2\big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} \rightarrow -\frac{\partial(\rho u_x^2)}{\partial x}$$

$$\rho u_y u_x\big|_y \Delta z \Delta x - \rho u_y u_x\big|_{y+\Delta y}\Delta z \Delta x \rightarrow \frac{\rho u_y u_x\big|_y - \rho u_y u_x\big|_{y+\Delta y}}{\Delta y} \rightarrow -\frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y}$$

$$\rho u_z u_x\big|_z \Delta x \Delta y - \rho u_z u_x\big|_{z+\Delta z}\Delta x \Delta y \rightarrow \frac{\rho u_z u_x\big|_z - \rho u_z u_x\big|_{z+\Delta z}}{\Delta z} \rightarrow -\frac{\partial(\rho u_z u_x)}{\partial z}$$

III.重力・圧力

$$(p\big|_x - p\big|_{x+\Delta x})\Delta y \Delta z + \rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow \frac{p\big|_x - p\big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \rho g_x \rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

以上より収支式は

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} = -\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial(\rho u_x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho u_z u_x)}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

(教科書P.19図3･6のいちばん下の式)

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \underline{\frac{\partial(\rho u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z u_x)}{\partial z}} = -\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\rho u_x^2)}{\partial x} = u_x \dfrac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \rho u_x \dfrac{\partial(u_x)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y} = u_y \dfrac{\partial(\rho u_x)}{\partial y} + \rho u_x \dfrac{\partial(u_y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial(\rho u_z u_x)}{\partial z} = u_z \dfrac{\partial(\rho u_x)}{\partial z} + \rho u_x \dfrac{\partial(u_z)}{\partial z} \end{cases}$$

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + u_x \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + u_y \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial y} + u_z \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial z} + \rho u_x \underline{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)}$$

$$= -\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

非圧縮性流体では

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \qquad (3\cdot2)'$$

(この資料4－7)

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + u_x \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + u_y \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial y} + u_z \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} + \underline{\rho g_x} \qquad (3\cdot4)$$

※教科書では重力以外の外力も考慮しているのでF_xとなっている。F_xはg_xと同じく単位質量あたりの力

流体の運動方程式

(3･4)：**応力方程式，**
コーシー(Cauchy)**の運動方程式**

以上はx方向成分の式

y, z方向成分についても同様に導くことができる

種々の座標系での応力方程式:P.20表3･2　　密度をくくりだした形

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t}+u_x\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+u_y\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial y}+u_z\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial z}=\underline{-\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}-\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial x}}+\rho g_x$$

τと速度勾配の関係(流動特性)を代入

↓

各種流体の速度分布を求めることができる

三次元流れの場合のニュートン流体のτと速度勾配の関係:P.21表3･3

以下では非圧縮性流体で $\nabla\cdot\mathbf{u}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$ として扱う。

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t}+u_x\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+u_y\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial y}+u_z\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial z}=-\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}-\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x$$

↓ P.21表3･3より

$$\tau_{xx}=-2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x},\ \tau_{yx}=-\mu\left[\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right],\ \tau_{zx}=-\mu\left[\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right]$$

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t}+u_x\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+u_y\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial y}+u_z\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial z}=$$

$$\underline{-\frac{\partial}{\partial x}\left(-2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left\{-\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial z}\left\{-\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\right\}}-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x$$

$$2\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)$$

$$=\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)}_{=0}$$

ニュートン流体の運動方程式：ナビエーストークス(Navie-Stokes)の運動方程式

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t}+u_x\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+u_y\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial y}+u_z\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)+\rho g_x$$

実質微分：流れと共に動いて観測した場合の運動量の変化率

資料A2で導いた一次元定常の式との比較

$$-\mu\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{\rho(u_1{}^2-u_2{}^2)}{L}+\frac{\Delta P}{L}\longrightarrow\frac{\rho(u_2{}^2-u_1{}^2)}{L}=\frac{\Delta P}{L}+\mu\frac{d^2u}{dy^2}$$

対流 **圧力** **粘性** **重力**

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t}+\boxed{u_x\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+u_y\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial y}+u_z\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial z}}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\boxed{\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)}+\rho g_x$$

速度分布の求め方

ここまで導かれた式

連続の式（P.17表3･1） $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=0$

運動方程式（P.23表3･4）

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t}+u_x\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+u_y\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial y}+u_z\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)+\rho g_x$$

$$\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial t}+u_x\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial x}+u_y\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+u_z\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)+\rho g_y$$

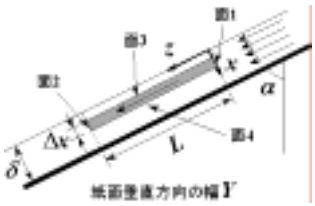
$$\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial t}+u_x\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial x}+u_y\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial y}+u_z\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)+\rho g_z$$

式：4本
未知関数：**速度3成分** u_x,u_y,u_z **と圧力** p ⟶ **上の式を解けば流体の運動が解ける**

速度分布を求める手順

1.座標系の決定→直交、円柱、球面
2.対象流れ場の特徴の確認→省略できる項の確認
3.境界条件の確認
4.方程式を解く

例題：演習3の問題



1.座標系の決定

直交座標系 ⟶ 解くべき方程式は表3・1,3・4の直交座標系の式

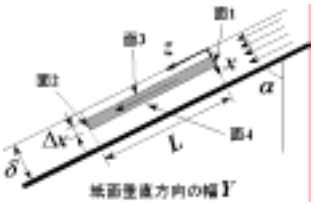
2.流れ場の特徴の確認

1)定常流れ

全ての式で $\frac{\partial}{\partial t}=0$

2)速度成分はz方向のみ

・運動方程式のx, y成分の式は不要



2)速度成分はz方向のみ(つづき)

・連続の式

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=0$$

↓ $u_x=0,\ \ u_y=0$ 非圧縮でρ一定ならば

$$\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \text{ さらに } \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}=0$$

3)速度はy方向に変化しない

$$\frac{\partial u_z}{\partial y}=0 \text{ さらに } \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}=0$$

4)圧力の変化はない

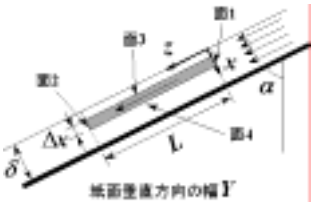
$$\frac{\partial p}{\partial z}=0$$

以上より

$$\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial t}+u_x\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial x}+u_y\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial y}+u_z\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)+\rho g_z$$

↓

$$0=\mu\frac{d^2u_z}{dx^2}+\rho g\cos\alpha$$



3.**境界条件の確認**

1) x=0 **で** $-\mu\dfrac{du_z}{dx}=0 \rightarrow \dfrac{du_z}{dx}=0$

2) x=δ **で** u_z=0

4.**方程式を解く**

$$0=\mu\frac{d^2u_z}{dx^2}+\rho g\cos\alpha$$

$$\downarrow$$

$$-\mu\frac{d^2u_z}{dx^2}=\rho g\cos\alpha$$

あとは演習問題3**の解答と同じ**