生成系, 基底, 次元

以下, $K=\mathbb{C}$又は$\mathbb{R}$, V を K 上のベクトル空間とし, V のベクトルは $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 等で表し, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{x}$ は列ベクトル ($\boldsymbol{s},\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}\in K^n$) とする. 又, 列ベクトルのときと同様に, V のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\,(\in V)$ の, 順序を問題にしない組を $\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\}$ で表し, 順序を付けた組を行列と同じ記号を用いて

$$A=[\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]\ (=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n])$$

と表す. 又, これらを単に $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n$ とも表す. ($V=K^m$ のときは A は $m\times n$ K-行列とみなせる.)
V のベクトルの組 $A=[\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]$ と列ベクトル $\boldsymbol{x}={}^t[x_1\,x_2\,\cdots\,x_n]\in K^n$ との積を, 行列の積と同様

$$A\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{a}_1\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}:=\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{a}_nx_n=\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_ix_i=\sum_{i=1}^nx_i\boldsymbol{a}_i$$

と定め, (列ベクトルのときと同様,) $\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\}$ の**一次結合** (**線型結合**) という. 他も同様に,

$\boldsymbol{b}\in V$ は $\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\}$ の**一次結合で表せる** $\iff$ $\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x}\in K^n$ が存在. (解 $\boldsymbol{x}$ をもつ.)
$\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\}$ が **一次独立** $\iff$ $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x}\in K^n$ は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ のみ. (自明な解しかもたない.)
$\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\}$ が **一次従属** $\iff$ $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{x}\in K^n$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ が存在. (自明でない解をもつ.)

と定める. m 次元列ベクトルの組 $A=[\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]$ (A は $m\times n$ K-行列) に対し, 第 2,3 章の結果を復習すると,

一次独立性と一次方程式

(1) $\boldsymbol{b}$ が $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ の一次結合で表せる. $\Leftrightarrow$ $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解をもつ. $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}[A,\boldsymbol{b}]=\operatorname{rank}A$.
(2) $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ が一次独立. $\Leftrightarrow$ $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は自明な解しかもたない. $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}A=n$.
(3) $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ が一次従属. $\Leftrightarrow$ $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は自明でない解をもつ. $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}A<n$.

m=n のとき, A は n 次正方行列になるので行列式を用いて判定できて,

一次独立性と行列式

(1) $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ が一次独立. $\iff$ $\operatorname{rank}A=n$ $\iff$ $|A|\neq 0$
(2) $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ が一次従属. $\iff$ $\operatorname{rank}A<n$ $\iff$ $|A|=0$
(3) $|A|\neq 0$ $\iff$ A は正則 $\iff$ 全ての $\boldsymbol{b}\in K^n$ は $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ の一次結合で表せる

最後の $\Leftarrow$ は, $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ を $A\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{e}_i$ と一次結合で表せば, $X=[\boldsymbol{x}_1\,\cdots\,\boldsymbol{x}_n]$ が A の逆行列になることから分る.

[4.2] (生成される部分空間) V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\}$ の一次結合で表されるベクトル全体

$$W=\{\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{a}_nx_n\mid x_1,\ldots,x_n\in K\}=\{A\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in K^n\}$$

は V の部分空間になる.

($\because$) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ とすれば $A\boldsymbol{0}=\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_i0=\sum_{i=1}^n\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ より [S0] をみたす.
$\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{c}\in W$ が $\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{s}=\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_is_i$, $\boldsymbol{c}=A\boldsymbol{t}=\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_it_i$, ($s_i,t_i\in K$, $\boldsymbol{s}={}^t[s_1\,\cdots\,s_n]$, $\boldsymbol{t}={}^t[t_1\,\cdots\,t_n]\in K^n$) と表されるとき, $x,\,y\in K$ に対し, (ベクトルとスカラーの分配法則, 結合法則, 和の交換法則等を用いて)

$$\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{c}=A\boldsymbol{t}\implies\boldsymbol{b}x+\boldsymbol{c}y=\Big(\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_is_i\Big)x+\Big(\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_it_i\Big)y=\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_is_ix+\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_it_iy=\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_i(s_ix+t_iy)=A(\boldsymbol{s}x+\boldsymbol{t}y)$$

$$(\therefore\ \ \boldsymbol{b}x+\boldsymbol{c}y=(A\boldsymbol{s})x+(A\boldsymbol{t})y=A(\boldsymbol{s}x+\boldsymbol{t}y)\ )\qquad\text{(分配法則, 結合法則が成立)}$$

であり, $\boldsymbol{s}x+\boldsymbol{t}y\in K^n$ より $\boldsymbol{b}x+\boldsymbol{c}y$ は $\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\}$ の一次結合で表せた. よって [S3] より W は部分空間.

これを $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\,,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\}$ で **生成される** (**張られる**) **部分空間** といい,

$$W=\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\,,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\rangle$$

と表す. また, W のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\,,\ldots\,\boldsymbol{a}_n\in W$ により,

$$W=\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\,,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\rangle=\{\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{a}_nx_n\mid x_1,\ldots,x_n\in K\}=\{A\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in K^n\}$$

となる, つまり, W の全てのベクトル $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n$ の一次結合で表せるとき, 組 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\,,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\}$ は W を**生成する**, あるいは W の **生成系** と呼ばれる. (これらの用語は無論 V にも適用される.)

ベクトル空間 V が V の有限個のベクトルの組で生成されるとき, V は **有限次元** であるといい, そうでないとき **無限次元** であるという. 以下, 特に断らなければ V は有限次元とする.

[基底] V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ は次の **[B]** を満たすとき V の **基底** (basis, base) であるという.

[B1] $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ は一次独立. $(A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0})$

[B2] $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ は V を生成する, $(V = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$. $\boldsymbol{b} \in V \Rightarrow \boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x} \in K^n$ がある$)$

注意 定義より一次独立な V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ は, それが生成する部分空間 $W = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ の基底になる. 従って, 一次独立なベクトルの組に関する命題は部分空間の基底に関する命題となり, 基底に関する命題は一次独立なベクトルの組に関する命題と考えられる.

[次元] 後に, 有限次元ベクトル空間 V $(\neq \{\boldsymbol{0}\})$ には基底が存在し, 基底をなすベクトルの個数 n は基底の取り方によらないことを示す. この個数 n を V の **次元** (dimension) といい,

$$\dim V \quad \text{より詳しくは} \quad \dim_K V$$

と表す. $V = \{\boldsymbol{0}\}$ のときは基底はないので $\dim\{\boldsymbol{0}\} = 0$ とする.

[基底の例]

(1) n 次元数ベクトル空間 K^n の基底: 基本ベクトルの組 $E_n = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n]$ は $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$ の基底になる. これを K^n の**標準基底**という. (この個数は n 個で, 上述の次元の定義はこのことを拡張したものである.)

(2) n 次元列ベクトルの n 個の組 $A = [\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \cdots\, \boldsymbol{a}_n]$ が K^n の基底 $\Leftrightarrow$ A は正則行列.

(3) [同次連立一次方程式の解空間の基底] $m{\times}n$ 行列 A に対する同次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間 $W_A := \{\boldsymbol{x} \in K^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の基底は基本解の組: $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$, $(r = \operatorname{rank} A)$. (前期に示した.) 次元は解の自由度 $n{-}r$ に一致する.

(4) n 次以下の一変数多項式全体 $K[x]_n$ の基底: $\{1, x, \ldots, x^n\}$ が基底になる. 実際, n 次多項式は $p(x) = a_0 1 + \cdots + a_n x^n$ と一次結合で表され, 多項式 $p(x)$ と $q(x)$ が多項式として等しい ($p = q$ または $p(x) \equiv q(x)$) のは次数と全ての係数が等しいとき, と定義されているので, $p = 0$ は $p(x)$ が定数 0 に等しいことを意味する. 従って $\{1, x, \ldots, x^n\}$ は一次独立. 従って次元は $n{+}1$.

(5) $m{\times}n$ K-行列全体 $M_{m,n}(K)$ の基底: 各 p, q に対し, (p, q) 成分のみが 1 で他の成分が 0 の行列 $E_{pq} := [\delta_{ip}\delta_{jq}]$ を**行列単位**という. これらの全体 $\{E_{pq} : 1{\leqq}p{\leqq}m,\ 1{\leqq}q{\leqq}n\}$ (mn 個) は $M_{m,n}(K)$ の基底になる. 実際, $A = [a_{ij}]$ は $A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$ と一次結合で表され, $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij} = O \Rightarrow$ 全ての $a_{ij} = 0$, より一次独立になる. 従って次元は mn.

- m 次元列ベクトルの組 $A = [\boldsymbol{a}_1\, \cdots\, \boldsymbol{a}_n]$ の生成する部分空間 $\langle \boldsymbol{a}_1\, \cdots\, \boldsymbol{a}_n \rangle$ の基底を求めるには前期に示した次の定理が有効である.

列ベクトルの組の生成する部分空間の基底

m 次元列ベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ に対し, $A = [\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \cdots\, \boldsymbol{a}_n]$ ($m{\times}n$ 行列) とし. A の階段行列を $B = [b_{ij}]$, 軸列が $q_1, q_2, \ldots, q_r$ $(r = \operatorname{rank} A)$ とする. このとき, 軸列の組 $\boldsymbol{a}_{q_1}, \boldsymbol{a}_{q_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{q_r}$ は一次独立であり, 他の $\boldsymbol{a}_j$ は軸列の組の一次結合で次の様に一意的に表せる.

$$(*) \quad q_i < j < q_{i+1} \implies \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}_{q_1} b_{1j} + \boldsymbol{a}_{q_2} b_{2j} + \cdots + \boldsymbol{a}_{q_i} b_{ij} = \sum_{k=1}^{i} \boldsymbol{a}_{q_k} b_{kj} \quad (i = 1, \ldots, r)\ (q_{r+1} := n{+}1)$$

従って $\langle \boldsymbol{a}_1\, \cdots\, \boldsymbol{a}_n \rangle$ の基底として軸列の組 $\boldsymbol{a}_{q_1}, \boldsymbol{a}_{q_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{q_r}$ が取れる.

- 諸定義では順序を問題にしないベクトルの組を用いたが, 今後は順序付けられたベクトルの組を用いる.