ベクトル空間, 部分空間の例

部分空間　一般にベクトル空間 V の部分集合 W が部分ベクトル空間になる事を示すには W が [S0] $\mathbf{0} \in W$, [S1] $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W \Rightarrow \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W$, [S2] $\boldsymbol{a} \in W,\ x \in K \Rightarrow x\boldsymbol{a} \in W$ を満たしているかどうかを順に調べれば良い. [S1],[S2] の代りに [S3] $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W,\ \ x, y \in K \Rightarrow x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b} \in W$ を確かめても良い．また，部分空間にならないことを示すには反例を挙げれば良い.

例題 1(部分空間の判定)　次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合が部分空間になるかどうかを調べよ.

(1) $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, x+y=0 \right\}$, (2) $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, x+y=1 \right\}$, (3) $W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, x+y \geqq 0 \right\}$, (4) $W_4 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2-y^2=0 \right\}$

解答　$\boldsymbol{x} = {}^t[x, y]$ とする．(1) W_1 は同次一次方程式の解空間なので部分空間になるが，ここでは [S] を確かめる:
[S0]: $0+0=0$ より $\mathbf{0} = {}^t[0,0] \in W_1$.　以下, $\boldsymbol{a} = {}^t[a_1, a_2],\ \boldsymbol{b} = {}^t[b_1, b_2] \in W_1$ とする, 即ち $a_1+a_2=0,\ b_1+b_2=0$.
[S1]: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ は $(a_1+b_1)+(a_2+b_2) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2) = 0+0=0$ より $x+y=0$ を満たすので $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W_1$. よって W_1 は和に関して閉じている.
[S2]: $s\boldsymbol{a} = {}^t[sa_1, sa_2]$ は $sa_1+sa_2 = s(a_1+a_2) = 0$ よりスカラー倍で閉じている. よって W_1 は部分空間になる.
(2) $\boldsymbol{x} = \mathbf{0} = {}^t[0,0]$ は $x+y=1$ を満たさない. よって W_2 は $\mathbf{0} \in W_2$ を満たさないので部分空間ではない.
(3) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 = {}^t[1,0]$ は $x+y \geqq 0$ を満たすので $\boldsymbol{e}_1 \in W_3$ だが, $(-1)\boldsymbol{e}_1 = {}^t[-1,0]$ は $x+y \geqq 0$ を満たさないので W_3 はスカラー倍に関して閉じていない. よって W_3 は部分空間ではない.
(4) $\mathbf{0} \in W_3,\ \boldsymbol{a}_1 = {}^t[1,1], \boldsymbol{a}_2 = {}^t[1,-1] \in W_4$ だが, $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2 = {}^t[2,0]$ は $x^2-y^2=0$ を満たさないので W_4 は和に関して閉じてない. よって W_4 は部分空間ではない.

[**幾何ベクトル空間 V^2, V^3 の部分空間**]　以下，幾何ベクトルは原点 O に関する位置ベクトルと考えることにより，平面，あるいは空間内の点と考え, V^2, V^3 は平面，空間と同一視する.
(1) $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ のとき，$\boldsymbol{a}$ の生成する部分空間 $\langle \boldsymbol{a} \rangle$ は O, $\boldsymbol{a}$ を通る直線.
(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が平行でない，即ち O, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が一直線上にないとき，$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle$ は 3 点 O, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の定める平面.

[**一次独立性, 基底の例**]

１つのベクトル $\boldsymbol{a}$ について: (1) $\boldsymbol{a}$ が一次従属 $\iff \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.　(1)* (対偶) $\boldsymbol{a}$ が一次独立 $\iff \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$.
($\because$) (1): ($\Rightarrow$) $x\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ をみたす $x \neq 0$ があるとすると，x^{-1} を両辺に掛けて $\boldsymbol{a} = x^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
（$\Leftarrow$）$\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ のとき」 $x=1$ は $x\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, $x \neq 0$ をみたすので一次従属.
[**幾何ベクトルの一次独立性**] $\mathbf{0}$ でない幾何ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ について
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が一次従属. $\Leftrightarrow \boldsymbol{b} = x\boldsymbol{a}$ と表せる. $\Leftrightarrow \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は平行. $\Leftrightarrow$ O, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は一直線上にある.
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が一次独立 $\Leftrightarrow$ O, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は一直線上にない. $\Leftrightarrow \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ は O, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平面になる.　このとき
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次従属. $\Leftrightarrow \boldsymbol{c} = x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ と表せる $\Leftrightarrow$ O, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は同一平面上にある.
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次独立. $\Leftrightarrow$ O, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は同一平面上にない. $\Leftrightarrow \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ は (３次元）空間全体を張る.

[**K^n の基底**] $A = [\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$ が K^n の基底 $\iff A$ は正則行列.
実際，$\boldsymbol{b} \in K^n$ は $\boldsymbol{b} = A(A^{-1}\boldsymbol{b}) = [\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n](A^{-1}\boldsymbol{b}),\ (A^{-1}\boldsymbol{b}) \in K^n$ と一意的に表される.

ベクトル空間, 部分空間の発展的例

[**ベクトル空間の発展的例**]　(一般に無限次元になる.)
(1) **数列空間** K^∞: 数列 $\{x_n\}$ の和，定数倍は項ごとにとる.　$\{x_n\}+\{y_n\} = \{x_n+y_n\},\ s\{x_n\} = \{sx_n\}$.
これは無限項の行または列ベクトルとみなされる: $\{x_n\} = [x_1\, x_2 \cdots]$
(2) K 係数一変数多項式全体の空間 $K[x]$: 多項式の和，定数倍（各係数の和，定数倍) でベクトル空間になる.
ここで，定数や単項式も多項式とみなす．特に零ベクトルは定数 0.
K **係数多変数多項式全体の空間** $K[x_1, \ldots, x_n]$ も $K[x]$ と同様に, 多項式の和, スカラー倍は係数の和, スカラー倍により得られるので K 上のベクトル空間になる.

[**写像と関数**]:　写像とは, 関数や変換と概念としては同じで, 集合 X, Y について X の元 x を１つ定める毎に Y の元 y を１つ (だけ) 対応させる規則 f のことで, f を X から Y への **写像** といい, $x \in X$ に対応する $y \in Y$ を x の f による**像** といい $f(x)$ や $y = f(x)$ 等と表す．また, X を f の **定義域**, Y を f の **値域**といい, これらを明示して

$$f : X \to Y$$

と表す．なお，値が数のときは関数といわれることが多く，そうでないとき（例えばベクトルのとき）写像といわれることが多い．また，$X = Y$ のとき，$f : X \to X$ は変換といわれることがある.

2 つの写像 $f,g:X\to Y$ が, 全ての $x{\in}X$ について $f(x){=}g(x)$ となるとき, f と g は**等しい** といい, $f{=}g$ と表す. また, $f(x)$ と $g(x)$ は写像として等しい, $f(x)$ と $g(x)$ は**恒等的に等しい**, ともいい, $f(x)\equiv g(x)$ とも表す.
(これらの記法 $f=g$, $f(x)\equiv g(x)$ は, 方程式 $f(x)=g(x)$ (これをみたす $a\in X$ を求める) と区別する為にある.)

(4) **関数空間**: 集合 $X(=\mathbb{R},\mathbb{R}^2,\ldots$ 等) 上の K-値関数全体の集合を $F(X,K)$ とする. (定数も関数とみなし, 零ベクトルは定数 0, 逆ベクトルは $-f(x)$ とする.)
$K{=}\mathbb{R}$ のとき $f\in F(X,\mathbb{R})$ は実数値関数で, $X{=}\mathbb{R},\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$ のとき微積分学では, 1,2,3 変数関数として $f(x)$, $f(x,y)$, $f(x,y,z)$ 等と表される. 複素数値関数 $f\in F(X,\mathbb{C})$ は, 例えば $\cos x+i\sin x\,(=e^{ix})$ の様に, 実数値関数 $g,h\in F(X,\mathbb{R})$ と虚数単位 i を用いて $f(x)\equiv g(x)+ih(x)$ と表される. (通常は単に $f(x)=g(x)+ih(x)$ と書かれる.)
通常の関数の和, スカラー倍は, 例えば $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^2+3x+1$ のとき, これらの和は $f{+}g$, s 倍は sf と表され, $(f+g)(x):=f(x)+g(x)=\sin x+x^2+3x+1$, $(tf)(x):=s\cdot f(x)=s\sin x$ と定められている, 一般の場合も, 関数 $f,g\in F(X,K)$ の和 $f{+}g$ と s $(\in K)$ 倍 sf は, 各 $a\in X$ について

$$(f{+}g)(a):=f(a)+g(a),\quad (sf)(a):=s(f(a))\quad (\text{関数 } f{+}g, tf \text{ の } a \text{ での値は, } f,g \text{ の } a \text{ での値の和, } s \text{ 倍.})$$

と定められている, 右辺は数なので数の性質 [F] により, 例えば和の結合法則は,

$$((f+g)+h)(a):=(f+g)(a)+h(a):=(f(a)+g(a))+h(a)=f(a)+(g(a)+h(a))=(f+(g+h))(a)$$

が各 $a\in X$ について成り立つので $(f+g)+h=f+(g+h)$ が成り立ち, 結合法則をみたす事が分る. 他も同様にして $F(X,K)$ は公理 [V] をみたす事が分り, K 上のベクトル空間になる.

(5) **写像空間**: 集合 X から K 上のベクトル空間 V への写像全体の集合 $F(X,V)$.
例えば $(V{=}\mathbb{R}^3)$ $f\in F(X,\mathbb{R}^3)$ は 3 つの関数の組 $f(x)={}^t[f_1(x),f_2(x),f_3(x)]$ で表され, ベクトル場といわれる. V のベクトル $\boldsymbol{a}$ は $f(x)\equiv\boldsymbol{a}$ となる定値写像とみなされ, $F(X,V)$ の零ベクトルは $\mathbf{0}\in V$, 逆ベクトルは $-f(x)$ であり, 関数空間のときと同様, V が公理 [V] をみたす事より $F(X,V)$ も [V] をみたし, K 上のベクトル空間になる.

[**部分空間の発展的例**] 以下の部分空間の例は微積分の定理を用いて示される. ($t\in K$ (スカラー) とする.)
[**収束数列の空間**] 収束数列全体の空間 W は数列空間 K^∞ の部分空間になる. 実際, $\mathbf{0}{=}\{0\}_{n=1}^\infty$ で, $\{x_n\},\{y_n\}$ を収束数列, $x{=}\lim x_n, y{=}\lim y_n$ とするとき $\{x_n+y_n\}$, $t\{x_n\}{=}\{tx_n\}$ は共に収束して $\lim(x_n+y_n)=x+y$, $\lim tx_n=tx$ が成り立つからである.
[**連続関数の空間** $C^0(X,\mathbb{R})$] $X=\mathbb{R},(a,b)$ 等とするとき $\mathbf{0}=$「定数 0」は連続で, $f(x),g(x)$ が連続なら $f(x){+}g(x)$, $tf(x)$ はともに連続なので $C^0(X,\mathbb{R})$ は関数空間 $F(X,\mathbb{R})$ (これは実ベクトル空間) の部分空間になる.
[C^r **級関数の空間** $C^r(X,\mathbb{R})$] $(r{=}1,2,\ldots,\infty)$ 定数 0 は無限回微分可能. $f(x),g(x)$ が微分可能なら $f(x){+}g(x)$, $tf(x)$ はともに微分可能で, 導関数は $(f{+}g)'(x){=}f'(x){+}g'(x)$, $(tf)'(x){=}t(f'(x))$ (**微分の線型性**という) なので, $f(x),g(x)$ が r 回連続微分可能なら $f(x){+}g(x)$, $tf(x)$ もそう. 従って $C^r(X,\mathbb{R})$ は $C^0(X,\mathbb{R})$ の部分空間になる.

[**同次線型漸化式の解空間**] k 項線型同次漸化式: $x_{n+k}{+}a_{k-1}x_{n+k-1}{+}\cdots{+}a_1x_{n+1}{+}a_0x_n=0$ (a_i は定数)
の解となる数列 $\{x_n\}$ 全体は数列空間の部分空間になる. (各 x_i について一次なので線型, 定数項がないので同次 (斉次) という.) 実際, $\mathbf{0}{=}\{0\}_{n=1}^\infty$ はこれを満たし, $\{b_n\},\{c_n\}$ がこの漸化式を満たすなら $\{b_n{+}c_n\},\{tb_n\}$ も
$(b_{n+k}{+}c_{n+k}){+}a_{k-1}(b_{n+k-1}{+}c_{n+k-1}){+}\cdots{+}a_0(b_n{+}c_n)=(b_{n+k}{+}\cdots{+}a_0b_n){+}(c_{n+k}{+}\cdots{+}a_0c_n)=0{+}0=0$
などよりこの漸化式を満たすので部分空間になる. (この数列は最初の $(k{-}1)$ 項 $b_1,\cdots,b_{k-1}$ により定められ, 解空間の次元は $(k{-}1)$ になることが分かる.)
[**同次線型常微分方程式の解空間**] y を x の関数とし, その n 階導関数を $y^{(n)}$ とするとき,
$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}{+}\cdots{+}a_1y'{+}a_0y=0$ $(y'{=}y^{(1)},y{=}y^{(0)})$ (各 $y^{(i)}$ について一次, 定数項がない.)
の形の方程式を n 階同次線型常微分方程式という. この解関数全体も漸化式の場合と同様 (数列を関数に置き換えて), 部分空間になる. 尚, 微分方程式論 (微積分の教科書参照) により, この解は初期値 $y(0),\cdots,y^{(n-1)}(0)$ により定まり, 解空間の次元が n 次元になることが知られている.
[**多項式の基底**] 多項式 $p(x)=a_nx^n{+}a_{n-1}x^{n-1}{+}\cdots{+}a_0=\sum_{i=0}^n a_ix^i$ と $q(x)=\sum_{i=0}^m b_ix^i$ が等しい ($p=q$, $p(x)\equiv q(x)$) のは, 次数が等しく $(m=n)$, 各係数が等しいとき $(a_i=b_i\,(0{\leqq}i{\leqq}n))$ と定められている. 特に, $\mathbf{0}=0$ で $p=0$ $(p(x)\equiv 0)$ は定義により全ての係数が 0 $(a_i{=}0,(i{=}0,1,\ldots))$ である. 従って, $p(x)=0$ を $x^0,x,x^2,\ldots,x^n$ の一次関係式と考えれば全ての係数 $=0$, 即ち $1{=}x^0,x,x^2,\ldots,x^n$ は全ての n について一次独立であり, 多項式全体の空間 $K[x]$ は無限次元となる.
n 次以下の多項式全体の空間 $K[x]_n$ は基底として $1,x,x^2,\ldots,x^n$ が取れるので $(n{+}1)$ 次元である.