ベクトル空間

数の性質　まず数の性質を復習しておく.
$\mathbb{C}$ = 複素数全体の集合,　$\mathbb{R}$ = 実数全体の集合,　$\mathbb{Q}$ = 有理数全体の集合　($\mathbb{Z}$= 整数全体の集合,　$\mathbb{N}$= 自然数全体の集合.)
$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ (,$\mathbb{Z}$) は和, 積を合わせて考えるとき, それぞれ**複素数体**, **実数体**, **有理数体**（, 整数環) といわれる.
$K = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ に共通する基本的性質 **[F]** (体の公理という) は,　$x, y, z \in K$ に対し
[F1]　和 $x + y$ について:
(i) **結合法則**:　$(x + y) + z = x + (y + z)$.　(ii) **交換法則**:　$x + y = y + x$.
(iii) **零の存在**:　全 $x \in K$ に対し $x + 0 = x = 0 + x$ となる $0 \in K$ が (唯１つ) ある.
(iv) $-x$ **の存在**:　各 $x \in K$ に対し $x + y = 0 = y + x$ となる $y \in K$ が (唯１つ) ある.
（この y は $-x$ と表される.　$\therefore\ x + (-x) = 0 = -x + x$.　差 $x - z$ は $x + (-z)$ と定められている.）
[F2]　積 $x \cdot y$ について:　$K^\times$ を K から 0 を除いた集合とするとき,
(i) **結合法則**:　$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.　(ii) **交換法則**:　$x \cdot y = y \cdot x$.
(iii) 1 **の存在**:　全 $x \in K^\times$ ($\therefore\ x \neq 0$) に対し $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$ となる $1 \in K$ が (唯１つ) ある.
(iv) **逆数** x^{-1} **の存在**:　各 $x \in K^\times$ ($\therefore\ x \neq 0$) に対し $x \cdot y = 1 = y \cdot x$ となる $y \in K$ が (唯１つ) ある.
(この y は x^{-1} と表され, x の逆数といわれる.　$\therefore\ x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$.　商 x/z は $x \cdot z^{-1}$ と定められている.）
[F3]　**分配法則**　(i)　$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.　(ii)　$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.
(通常, 積 $x \cdot y$ は単に xy と表される.）
((唯１つ) の部分は逆行列の一意性と同様に証明できる. 例えば, [F1(iii)] をみたす $0'$ があれば, $0' \underset{x=0'}{=} 0 + 0' \underset{x=0}{=} 0$.)
これらの性質から, 数の四則演算に関する性質は全て出る.　例えば $0x = 0$ もこれらを用いて証明できる.
($\because\ 0x = (0+0)x = 0x+0x$.　両辺に $-0x$ を加えて,　$0 = 0x+(-0x) = (0x+0x)+(-0x) = 0x+(0x+(-0x)) = 0x+0 = 0x$.）
注意 1　一般に, 集合 K 上に体の公理 **[F]** をみたす演算 $+, \cdot$ が与えられているとき, K を**体**(詳しくは可換体) という. **[F]** をみたすということは, 一般の体においても数と同様に計算できるということを意味する. (積の可換性 [F2(ii)] をみたさないときは非可換体, または斜体という.) また一般に, K は演算 $+$ により, $K^\times$ は演算 $\cdot$ により (可換) **群** になるという. 0 は加法の**単位元**, $-x$ は $+$ に関する x の**逆元**,　1 は乗法の**単位元**, x^{-1} は $\cdot$ に関する x の**逆元**といわれる. (詳しくは, 集合 G 上に結合法則をみたす演算が定められていて, (iii) をみたす単位元と, 各 x に対し (iv) をみたす逆元が存在するとき G を群といい, さらに演算が交換法則をみたすとき可換群または Abel 群という.)

以下, $K = \mathbb{C}$ 又は $\mathbb{R}$ とする. ($K = \mathbb{Q}$ や一般の体でも同様だが, ここでは $\mathbb{C}$,$\mathbb{R}$ に限定して考える.)
n 次元列ベクトル全体の集合を $\mathbb{C}^n$, n 次元実列ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n$ と表す, 即ち

$$\mathbb{C}^n = \{{}^t[x_1\, x_2\, \cdots\, x_n] \,|\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}\},\quad \mathbb{R}^n = \{{}^t[x_1\, x_2\, \cdots\, x_n] \,|\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\},\quad K^n = \mathbb{C}^n \text{ 又は } \mathbb{R}^n$$

n 次元の, 行ベクトル全体の集合, 実行ベクトル全体の集合は便宜的に $\mathbb{C}^{n*}$, $\mathbb{R}^{n*}$ と表す事にする. $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{C}^{n*}$) は $\mathbb{C}$ 上の, $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^{n*}$) は $\mathbb{R}$ 上の**数ベクトル空間**, 又は単に**数空間**といわれる.

注意 2　$\mathbb{R}^2$,$\mathbb{R}^3$ は座標平面, 座標空間とみなされ, その座標は列ベクトルで表しても行ベクトルで表しても同じ点の座標を表す. この様に行ベクトルと列ベクトルを区別する必要のないときは $\mathbb{C}^{n*}$, $\mathbb{R}^{n*}$ は $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$ と表される.

数ベクトル空間における和とスカラー倍は, 成分の和, スカラーと成分の積で定められているので数の性質 **[F]** より, $V = \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n*}$ は行列の和, 複素数倍に関し, $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n*}$ は行列の和, 実数倍に関し次の性質 **[V]** をもつ:
(ベクトル空間の公理 [V])　$K = \mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ とするとき
[V1] 和について:　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ に対し
(i)(結合法則）　$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$　(ii) (交換法則）　$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
(iii) (**零ベクトル**の存在）全 $\boldsymbol{a} \in V$ に対し $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a}$ となる $\boldsymbol{0} \in V$ が (唯１つ) ある.
(iv)（逆ベクトルの存在）各 $\boldsymbol{a} \in V$ に対し $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ となる $\boldsymbol{b} \in V$ が (唯１つ) ある.
この $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ の**逆ベクトル**といい, $-\boldsymbol{a}$ と表す. 差 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$ と定める.
[V2] スカラー倍について:　各 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$,　$s, t \in K$ に対し,　$\boldsymbol{a}t = t\boldsymbol{a}$ であり
(i) (結合法則）　$(st)\boldsymbol{a} = s(t\boldsymbol{a})$　(ii) (単位性）　$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
[V3] (i) (分配法則１）　$s(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = s\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}$　(ii) (分配法則２）　$(s + t)\boldsymbol{a} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{a}$

$m \times n$ 行列全体の集合 $M_{m,n}(\mathbb{C})$, $m \times n$ 実行列全体の集合 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ (まとめて $M_{m,n}(K)$) も同様に行列の和, スカラー倍で 上の公理 **[V]** をみたす. ここで, 零ベクトルに当るのは零行列 O, A の逆ベクトルは $-A$ である.

[ベクトル空間] これらを一般化してベクトル空間 (線型空間) を次の様に定義する.
一般に集合 V の各元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に, 和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V$ とスカラー倍　$t\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}t \in V$　($t \in K$) が定められていて上の公理 **[V]** をみたすとき, V を K 上の **ベクトル空間**, あるいは**線型空間** であるといい, $K = \mathbb{C}$ のとき V を**複素ベクトル空間 (複素線形空間)**, $K = \mathbb{R}$ のとき V を**実ベクトル空間 (実線形空間)** という.　また, ベクトル空間の元（＝要素）を **ベクトル** という.　($K = \mathbb{R}$ のときはスカラー倍として実数倍しか考えていないということである.)

このとき ベクトルの和は [**V1**] より数の和と同様の, ベクトルのスカラー倍は [**V2**] と [**V3**] より数の積と同様の性質を持つ. 従って 和, スカラー倍については文字式と同様に計算してよい. 例えば, 結合法則が成り立つので $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $st\boldsymbol{a}$ の様に括弧は省略される. また, 例えば次が成り立つ:

$$\textbf{[V2(v)]}\quad 0\boldsymbol{a}=\mathbf{0},\qquad t\,\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

$(\because)\quad 0\boldsymbol{a}=(0+0)\boldsymbol{a}\underset{[\mathrm{V3(ii)}]}{=}0\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{a}$. 左右両辺に $-0\boldsymbol{a}$ を加えて, $0\boldsymbol{a}+(-0\boldsymbol{a})=0\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{a}+(-0\boldsymbol{a})$.
左辺 $=0\boldsymbol{a}+(-0\boldsymbol{a})\underset{[\mathrm{V1(iv)}]}{=}\mathbf{0}$, 右辺 $=0\boldsymbol{a}+(0\boldsymbol{a}+(-0\boldsymbol{a}))\underset{[\mathrm{V1(iv)}]}{=}0\boldsymbol{a}+\mathbf{0}\underset{[\mathrm{V1(iii)}]}{=}0\boldsymbol{a}$. よって $\mathbf{0}=0\boldsymbol{a}$.
もう一方も $\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}$ より同様に出来る.

[**ベクトル空間の例**] (上記 K^n, $M_{m.n}(K)$ を含む.)
数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^{n*}$ は複素ベクトル空間の, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n*}$ は実ベクトル空間の例になる. (n=1, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ もベクトル空間.) 以下, 記法を一貫させる為, 数ベクトルは列ベクトルとし, 数ベクトル空間は $K^n(=\mathbb{C}^n,\ \mathbb{R}^n)$ のこととする.
$m\times n$ **行列のつくるベクトル空間** $m\times n$ 行列全体の集合 $M_{m,n}(\mathbb{C})$ は複素ベクトル空間, $m\times n$ 実行列全体の集合 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ 実ベクトル空間である. (纏めて $M_{m,n}(K)$ は K 上のベクトル空間になる.)
以下, (複素) 行列は $\mathbb{C}$-行列, 実行列は $\mathbb{R}$-行列と書き, 纏めて K-行列という.

零ベクトル空間 $\{\mathbf{0}\}$: $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $t\mathbf{0}=\mathbf{0}$ と定めると $\mathbf{0}$ だけからなる集合 $\{\mathbf{0}\}$ はベクトル空間になる.

幾何ベクトル空間 V^2, V^3: 平面や空間の, 有向線分 AB で表されるベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を (数ベクトルと区別して) **幾何ベクトル**という. (ABDC が平行四辺形のとき $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ で, 和は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で定められ, $\mathbf{0}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}$. 実数倍が, t>0 のときは方向が同じで長さが t 倍, t<0 のときは方向が逆で長さが $|t|$ 倍, $0\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\mathbf{0}$ と定義されている.)
平面. 空間の幾何ベクトル全体の集合を V^2, V^3 と表すと, これらは図を描くことにより公理 [**V**] をみたす事が確かめられ実ベクトル空間になる. 以下, 幾何ベクトル $\boldsymbol{a}$ は原点 O に関する位置ベクトル $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と考えることにより, 平面や空間内の点 A と考え, V^2, V^3 は平面や空間と同一視する.

多項式の空間 K 係数一変数多項式全体の空間 $K[x]$: ($\mathbb{R}[x]$ は実係数, $\mathbb{C}[x]$ は複素係数の多項式全体) これらは多項式の和, 定数倍で K 上のベクトル空間になる. (但し定数や単項式も多項式とする. 特に零ベクトルは定数 0.) 即ち, $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, $q(x)=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i$, $c\in K$ ならば $(p+q)(x):=\sum_{i=0}^{\max\{m.n\}}(a_i+b_i)x^i$, $cp(x):=\sum_{i=0}^{n}ca_ix^i$. ($m$>$n$ なら i>n について a_i:=0 とする.) 和, スカラー倍は各 x^i の係数の和, スカラー倍なので, 数の性質 [F] より公理 [V] をみたす事が分る.

[**部分空間**] K 上のベクトル空間 V の部分集合 W が V の **部分ベクトル空間**または **線形部分空間** (略して **部分空間**) とは V における和, スカラー倍により閉じている, 即ち次の性質 [**S**] をみたすときをいう：

[S0] $\mathbf{0}\in W$ **[S1]** $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in W\implies\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in W$ **[S2]** $\boldsymbol{a}\in W,\ s\in K\implies s\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}s\in W$

和, スカラー倍は V の中では公理 [V] をみたしているので, W でも当然みたされ, W はベクトル空間になる.
注 V 自体も V の部分空間とする. また, 零ベクトル空間 $\{\mathbf{0}\}$ はすべてのベクトル空間の部分空間と考える.
[S1],[S2] $\iff$ **[S3]**：$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in W,\ x,y\in K\implies x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}x+\boldsymbol{b}y\in W$
($\because$ $[S3]\Rightarrow[S1]$:) x=y=1 とすれば [V2 iv] より [S1]. ($\because$ $[S3]\Rightarrow[S2]$:) y=0 とすれば [V2 v],[V1 iii] より [S2].
($\because$ $[S1],[S2]\Rightarrow[S3]$) [S2] より $x\boldsymbol{a}$, $y\boldsymbol{b}\in W$. [S1] より $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}\in W$.
[S4] ([S3] より帰納的に：) $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k\in W,\ x_1,\dots,x_n\in K\implies(x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_{k-1}\boldsymbol{a}_{k-1})+x_k\boldsymbol{a}_k\in W$

[**部分空間の例**] (1) K^n の部分空間として, $m\times n$ K-行列 A に対する $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解空間 $W_A=\{\boldsymbol{x}\in K^n\mid A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\}$.
($\because$) [S0] $A\mathbf{0}=\mathbf{0}$ より $\mathbf{0}\in W_A$. [S3] $A\boldsymbol{x}_1=\mathbf{0}$, $A\boldsymbol{x}_2=\mathbf{0}$, $s,t\in K\Rightarrow A(s\boldsymbol{x}_1+t\boldsymbol{x}_2)=sA\boldsymbol{x}_1+tA\boldsymbol{x}_2=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$.
(2) V^2, V^3 の部分空間として, V^n (n=2, 3) の原点 $\mathrm{O}=\mathbf{0}$ を通る直線 W_1, 平面 W_2（上の点全体). ([S0] をみたす.)
($\because$) 幾何ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の実数倍は O, A を通る直線上にある. また, 原点を通る同一直線上のベクトルの和は元の直線上にあるので W_1 は部分空間になる. さらに, 原点を含む同一平面上にあるベクトルの和は元の平面上にあるので W_2 は部分空間になる.
(3) n 次以下の K 係数多項式全体の空間 $K[x]_n$ ($0\in K[x]_n$ で, n 次以下の多項式の和, スカラー倍も n 次以下.)