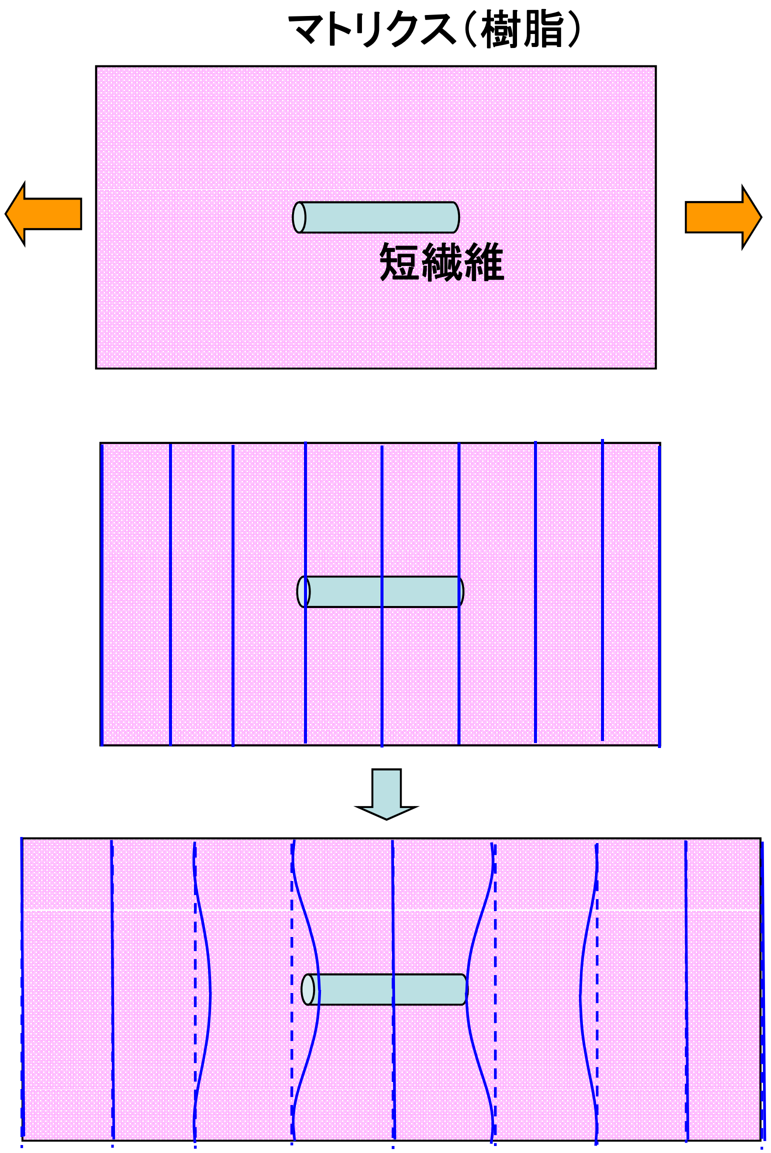
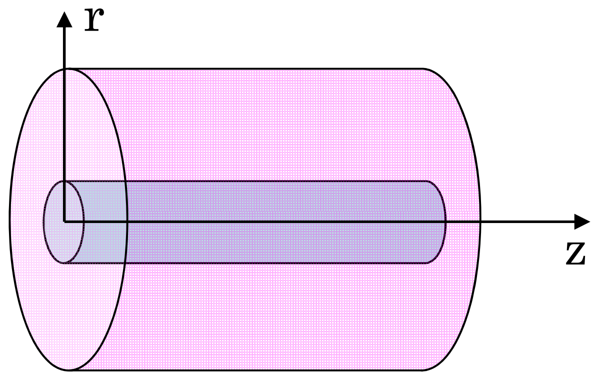
短繊維強化複合材料の強化理論





z軸方向のせん断応力をτ_mとすると
マトリクス内の力の釣り合いから

$$\frac{\partial \tau_m}{\partial r} + \frac{\tau_m}{r} = 0 \qquad \text{--------(1)}$$

フックの法則から

$$\tau_m = G_m \frac{\partial u_m}{\partial r} \qquad \text{--------(2)}$$

u_m :マトリクス内の z 方向変位
（ひずみではない）
G_m :せん断弾性率

境界条件

$$u_m = u_f \quad at \quad r = R_f$$

$$u_m = u_c \quad at \quad r = R_m$$

$$\tau_m = \tau_i \quad at \quad r = R_f$$

R_m **繊維の存在の影響が及ぶマトリクスの範囲**

$$\ln \tau_m + C = -\ln r$$

$$\Rightarrow \ln \tau_m - \ln \tau_i = -\ln r + \ln R_f$$

$$\therefore \frac{\tau_m}{\tau_i} = \frac{R_f}{r}$$

(2)に代入

$$\tau_i R_f \frac{1}{r} = G_m \frac{\partial u_m}{\partial r}$$

$$\ln r + C = \frac{G_m}{\tau_i R_f} u_m$$

$$\Rightarrow \ln r - \ln R_f = \frac{G_m}{\tau_i R_f}\left(u_m - u_f\right)$$

$r = R_m$で$u_m = u_c$

$$\therefore \tau_i = \frac{G_m\left(u_c - u_f\right)}{R_f \ln\left(R_m / R_f\right)}$$

繊維にマトリクスから加わるせん断応力と繊維内の伸長応力の釣り合いから

$$\pi R_f^2 d\sigma_f = -\tau_i 2\pi R_f dz$$

$$\frac{\partial \sigma_f}{\partial z} = -\frac{2\tau_i}{R_f}$$

繊維に関しフックの法則から

$$\sigma_f = E_f \frac{\partial u_f}{\partial z}$$

ここで

$$\frac{\partial u_c}{\partial z} = \varepsilon = const.$$

(マトリクスのひずみ)

$$\frac{\partial^2 \sigma_f}{\partial z^2} = \beta^2 \left(\sigma_f - E_f \varepsilon\right)$$

$$\beta^2 = \frac{2G_m}{E_f R_f^2 \ln\left(R_m / R_f\right)}$$

微分方程式の解は

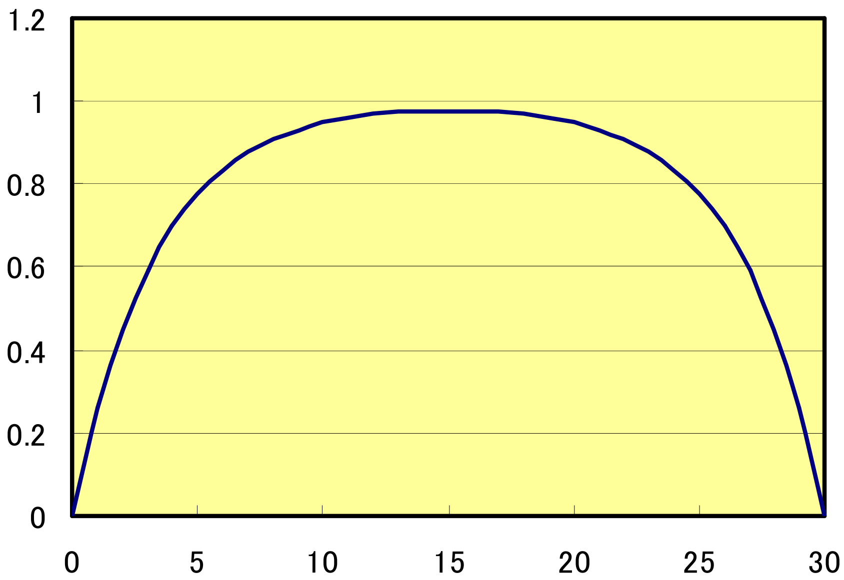
$$\sigma_f = A\sinh(\beta z) + \cosh(\beta z) + E_f \varepsilon$$

$z = 0 \quad and \quad \ell_e$ で $\sigma_f = 0$ だから

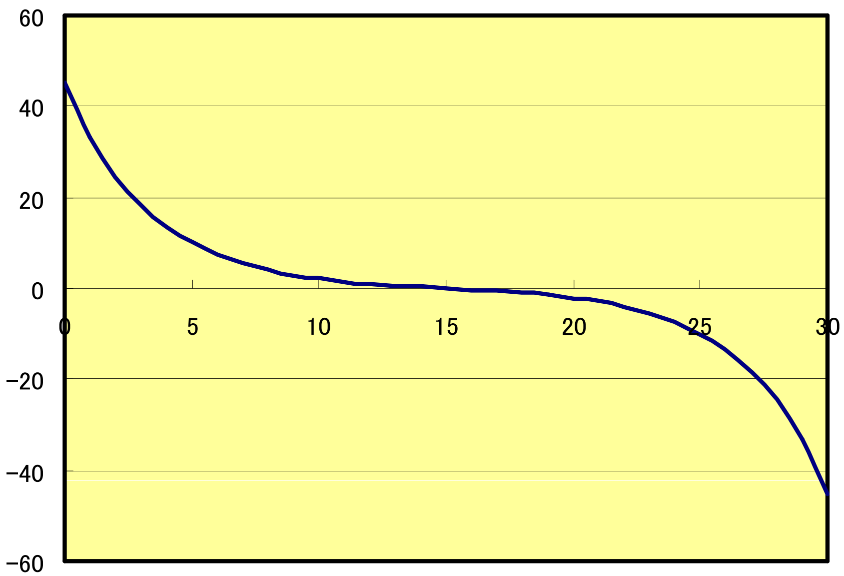
$$\sigma_f = E_f \varepsilon \left\{ 1 - \frac{\cosh\left[\beta\left(\ell_e / 2 - z\right)\right]}{\cosh\left(\beta \ell_e / 2\right)} \right\}$$

また $\tau_i = -\dfrac{R_f}{2}\dfrac{\partial \sigma_f}{\partial z}$ だから

$$\tau_i = \frac{R_f \beta E_f \varepsilon}{2} \frac{\sinh\left[\beta\left(\ell_e / 2 - z\right)\right]}{\cosh\left(\beta \ell_e / 2\right)}$$



繊維に加わる伸長応力



繊維ーマトリクス界面のせん断応力

繊維の長さ方向の平均応力は

$$\sigma = \frac{1}{\ell_e}\int_0^{\ell_e}\sigma_f dz = E_f \varepsilon\left(1 - \frac{\tanh\frac{\beta\ell_e}{2}}{\frac{\beta\ell_e}{2}}\right)$$

従って，短繊維が一方向に並んだ複合材の弾性率は

$$E_L = E_f V_f f(\ell_e) + E_m(1 - V_f)$$

ただし

$$f(\ell_e) = 1 - \frac{\tanh\frac{\beta\ell_e}{2}}{\frac{\beta\ell_e}{2}}$$

短繊維強化複合材料における繊維の利用効率