数理計画法E（第6学期）

担当：飯田勝吉（いいだかつよし）
iida@gsic.titech.ac.jp

数理計画法とは

- 近代工学システムの設計・分析の基礎理論
- 極めて汎用性の広く、様々なシステムに対して応用可能

この授業の構成（1）

- PPT穴あき配布資料に基づいて実施
  - OCWにて配布予定
- 参考書：福島雅夫著、「数理計画入門」、朝倉書店、1996.

この授業の構成（2）

- 1回・10/4（月）数理計画法とは
- 2回・10/18（月）線形計画法I
- 10/21（木）休講予定
- 3回・11/1（月）線形計画法II
- 4回・11/8（月）線形計画法III
- 5回・11/15（月）線形計画法IV
- 6回・11/22（火）ネットワーク計画法I
- 7回・11/29（月）ネットワーク計画法II
- 8回・12/6（月）ネットワーク計画法III（休講の可能性あり）
- 9回・12/13（月）ネットワーク計画法IV
- 10回・12/20（月）整数計画法I
- 11回・1/17（月）整数計画法II
- 12回・1/24（月） 整数計画法III
- 13回・1/31（月）非線形計画法I
- 14回・2/7（月）重要項目の復習

ネットワークシステム工学

- 情報通信ネットワークとコンピュータシステムを一体のものとして捉え、システム全体の設計、構築、管理などにかかわる工学
  - Information Communication Technology (ICT)の発展を支える学問

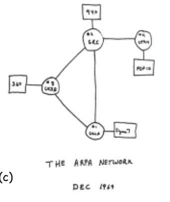
インターネット開発の歴史

- 1969 ARPAネット
- 1973 Ethernet (by R. Metcalfe)
- 1981 TCP (RFC793)
- 1983 Ethernet (CSMA/CD)
- 1987 商用ISP (UUNET)
- 1988 TCP (SIGCOMM, by V. Jacobson)
- 1992 日本の商用ISP (AT&T Jens, IIJ)
- 1993 Web (Mosaic)

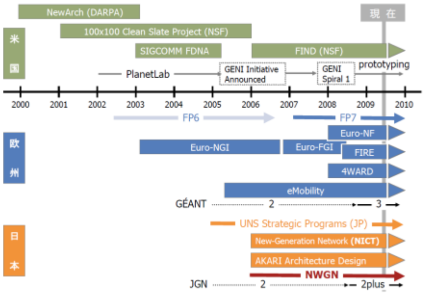
- Security (IPsec)
  - 1995 IP Authentication Header (RFC1826)
  - 1995 IP Encapsulating Security Payload (RFC1827)
- Network Management
  - 1988 SNMP (RFC1067)
  - 2001 sFlow (Traffic Monitoring) (RFC3176)

昔を引きずっている

・利用者限定
・セキュリティ機構なし
・高速回線向けではない
・ネットワーク管理なし



Future Internet（新世代ネットワーク）開発に関する世界的動向



「新世代ネットワークアーキテクチャAKARI概念設計所改訂版(ver2.0)」より抜粋

新世代ネットワーク／Future Internet

- 現在のインターネットとは質的に異なる全く新しいネットワーク
- コンピュータと通信機器が融合した新しいネットワーク
- 新しいサービスやビジネスが立ち上がる日本／アジアの技術の中心

新世代ネットワークの研究開発に必要なスキル

- 複雑なネットワークシステムの**経験と深い理解**
  - **インターネット5階層モデル**
  - **DWDM, Ethernet, GMPLS, RIP, OSPF, BGP, TCP, UDP, Middleware**
  - **Operating System, アプリケーションプログラム**
  - **インターネットセキュリティ他**
- **性能解析力**
  - **モデルを立てて対象となるシステムを分析する力**

モデル化とは（1）

- モデル化（modeling）
  - 様々なシステムの設計・分析の際に利用
  - 現実のシステムの中の重要な要素を取り出し、それがシステムの重要な性能にどのような影響を明らかにするための分析の基礎土台を作り出すこと
  - 入力パラメータ：システムに重要な影響を与える要素
  - 出力パラメータ：性能指標
- 性能指標（performance metrics）
  - モデル化において興味があるシステムの性能

モデル化とは（2）

- モデル化の例
  - 無線通信システムの伝播遅延
    - 影響を与えるパラメータ・要素
      - 送受信間の距離、障害物、周波数帯域、気温、湿度、風速などなど
  - モデル化1
    - 送受信間の距離が伝播遅延に与える影響
  - モデル化2
    - 送受信間の距離および気温が伝播遅延に与える影響

モデル化とは（3）

- 最適化（optimization）
  - モデル化を行った後に実施
  - システムの設計指針を与えたり、最適パラメータの選択を行う

- 目的関数： $f(x)$ → 最大化（あるいは最小化）
- 制約条件： $x \in S$

- ただし、xはn次元実ベクトル、fはn次元実ベクトル空間上で定義される実数値を取る関数、Sはn次元実ベクトル空間の部分領域である。

数理計画問題とは

- 数理計画問題（mathematical programming）
  - システムを工学的に分析するためのモデルを構築し、そのモデル上での最適化を行い、当該システムの設計・分析を容易にするもの
  - 第１ステップ：数学モデルの構築（今回の講義）
  - 第２ステップ：数学モデルを解く（次回以降）
- Definition of "Engineering"
  - Design under constraints

線形計画問題（１）

- [問題1.1]4種類の原料A,B,C,Dを用いて、3種類の製品I,II,IIIを生産している工場が最大の利益を上げるにはどのような生産計画をたてればよいか？

(a)利益

I	II	III
70	120	30

(b)原料の必要量

	I	II	III
原料A	5	0	6
原料B	0	2	8
原料C	7	0	15
原料D	3	11	0

(c)使用可能量

原料A	80
原料B	50
原料C	100
原料D	70

線形計画問題（２）

- [数学モデル化] 各製品の生産量を変数としてx_1, x_2, x_3とおく。問題の目的はx_1, x_2, x_3の組を求めることである。求めたいx_1, x_2, x_3を____________という。総利益は

$$f(x_1, x_2, x_3) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad (1.1)$$

と書ける。

線形計画問題（３）

- 原料の使用可能量・生産量に制限

$$\begin{array}{llcl} \text{原料Aに対する条件：} & 5x_1 \qquad\quad +6x_3 & \le & 80 \\ \text{原料Bに対する条件：} & \qquad 2x_2 \quad +8x_3 & \le & \_\_ \\ \text{原料Cに対する条件：} & 7x_1 \qquad\quad +15x_3 & \le & \_\_ \\ \text{原料Dに対する条件：} & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \le & \_\_ \end{array} \quad (1.2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \quad (1.3)$$

数理計画問題（４）

- 式(1.2)および(1.3)を満たし、式(1.1)を最大化するようなx_1, x_2, x_3を求める問題。
- 最大化（あるいは最小化）したい関数を___________といい、決定変数に課されている条件を____________という。

線形計画問題（５）

- 数理計画問題
  - 与えられた制約条件のもとで、目的関数を最小または最大とするような決定変数の値をみつけること
- 線形計画問題
  - 変数の１次の等式または不等式で与えられた制約条件のもとで、変数の１次関数で与えられた目的関数を最大化（あるいは最小化）する問題

線形計画問題(6)

- 目的関数:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿→最大化
- 制約条件:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

線形計画問題(7)

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 70 \\ 120 \\ 30 \end{pmatrix}, \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \\ 7 & 0 & 15 \\ 3 & 11 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 80 \\ 50 \\ 100 \\ 70 \end{pmatrix},$$

目的関数:＿＿＿＿＿＿→最大化

制約条件:＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿

ネットワーク計画問題(1)

- グラフ(graph)
  - 点(接点、ノード)と二つの点を結ぶ線・矢印(辺、枝)の集合
  - 辺が「向きの無い線」 ＝＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿
  - 辺が「向きのある矢印」＝＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

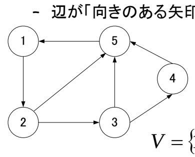


図1．1

$$V = \{1,2,3,4,5\}$$
$$E = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1),(2,5),(3,5)\}$$

ネットワーク計画問題(2)

- 節点や辺に値が与えられているグラフをネットワークという

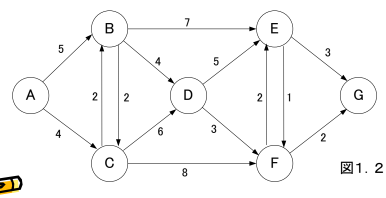


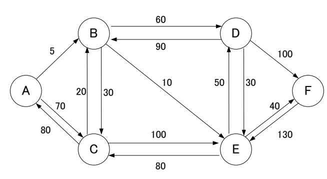
図1．2

ネットワーク計画問題(3)

- [問題1.2] 都市AからGまで、交通機関を乗り継いで行きたい。どの経路を通ったら最短で行くことができるか。(このような問題を＿＿＿＿＿＿という)
- グラフまたはネットワークにおいて、ある節点から一つまたは複数の辺をたどってまた元の節点へ到達する道順を＿＿＿＿＿という。
- ある節点から他の節点へ到達し、閉路を含まない道順を＿＿＿＿＿＿という。
- 辺に(正の)値が与えられたネットワークにおいて、パス上の辺の値を全て合計した値をそのパスの**長さ**(経路長)という。

ネットワーク計画問題(4)

- [問題 1.3] 下図の6つの都市を含んで宅配便を営んでいる運送会社がある。図のネットワークの枝の横に書かれた数値は、1日の運送量の上限値(個)である。A市からF市まで1日に運べる品物の最大量はいくらか。



ネットワーク計画問題(5)

- ある節点から他の節点へ流すことができるフローの最大値を求める問題を________という。
- また別の問題として、辺には容量制限があり、辺ごとに単位輸送量あたりのコストが与えられている場合、定められた量を最小のコストで輸送する方法を求める問題を__________という。

ネットワーク計画問題(6)

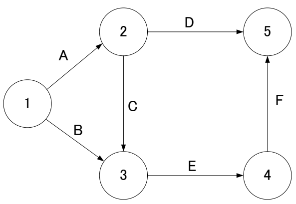
- [問題 1.4] あるプロジェクトが終了するまでに最低限必要な日数を知りたい。ただし、プロジェクトは作業Aから作業Fの6つの作業からなり、それぞれの作業にかかる日数とその作業を始める前に終了しておかなければならない作業を表に示す。

作業名	制約	所要日数
A	なし	4
B	なし	3
C	A	9
D	A	2
E	B,C	5
F	E	4

ネットワーク計画問題(7)

- この問題のように、通常、プロジェクト内の各作業は独立に実行できるのではなく、別の作業が終了しないとその作業が開始できない、というような半順序関係がある。このような半順序関係はネットワークであらわすと解析がし易く、その方法の一つとして____________がある。
- この図から最低限必要な日数や、各作業の余裕時間などを求めることによって、プロジェクトの計画や進行管理に利用する手法を Program Evaluation and Review Technique (PERT)と呼ぶ。

ネットワーク計画問題(8)



組み合わせ最適化問題(1)

- 線形計画問題では解けず、解を整数限定にせねばいけない場合がある。
- [問題 1.5] いまn個の品物のうちいくつかを選んでナップザックにつめてハイキングに持っていくことを考える。それぞれの品物の重さは$a_1,\ldots a_n$(グラム)で、ナップザックには合計bグラムまでしか入れられない。それぞれの品物の利用価値が$c_1,\ldots c_n$で表されているとき、利用価値が最大となる品物の組み合わせを選択せよ。

組み合わせ最適化問題(2)

- 数学的モデル化変数を

$$x_i = \begin{cases} 1 & i\text{番目の品物を持っていく} \\ 0 & i\text{番目の品物を持っていかない} \end{cases}$$

としたとき、以下のように定式化できる。

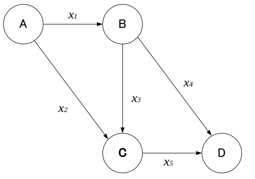
目的関数：________________→最大化
制約条件：________________
____

組み合わせ最適化問題（3）

- この問題は整数計画問題の一種であり、特に変数が0または1しか取らないような問題を__________________といい、その中でもこの問題のように制約条件が一つしか取らないような問題を________________________という。
- この問題のように変数のとりうる値が離散的で有限個である場合、最適解は有限個の解の一つであるので、________________とも呼ぶ。

非線形計画問題（1）

- [問題 1.6] 右図のネットワークで表される道路網を考える。郊外のAから都心部のDへ向かってw台の車が出発するとき、どの経路を通っていけば道路網の効率利用の観点から望ましいか？道路網の効率を示す尺度は通行に要する延べ時間とする。



非線形計画問題（2）

- 数学モデル化
- 変数は各辺を通る車の台数x_1,x_2,x_3,x_4,x_5とする。各節点における条件から

$$
\begin{aligned}
&\text{節点A：} & x_1 + x_2 &= w \\
&\text{節点B：} & x_1 - x_3 - x_4 &= 0 \\
&\text{節点C：} & \underline{\qquad\qquad} &= 0 \\
&\text{節点D：} & \underline{\qquad\qquad} &= w
\end{aligned}
$$

- また、それぞれの車の台数は非負であるから

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_5 \geq 0$$

非線形計画問題（3）

- これらの１次の等式および不等式が________となる。
- 次に目的関数を考える。ある道路を通過する際の所要時間はその道路の交通量に依存する。その道路を通行している車の台数がxであるときに道路iの通行所要時間を$f_i(x)$とすると目的関数は

$$x_1 f_1(x_1) + x_2 f_2(x_2) + \cdots + x_5 f_5(x_5)$$

非線形計画問題（4）

- となる。ここで$f_i(x)$は一般に右図に示すように、ある一定のxまではほぼ一定値を、それより大きくなると急激に増加する（渋滞状態）ような非線形関数と考えられる。このように、制約条件や目的関数が非線形関数で表さられる問題を____________という。