



Tokyo Tech

離散構造とアルゴリズム

(1-3) 2部グラフとグラフの彩色

(1-4) オイラーグラフとハミルトングラフ

高橋篤司

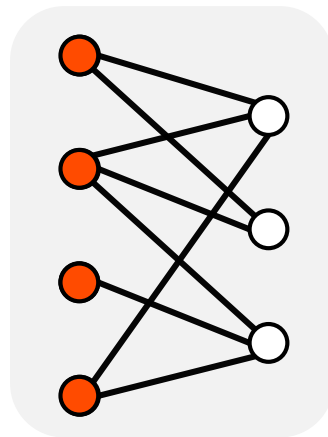
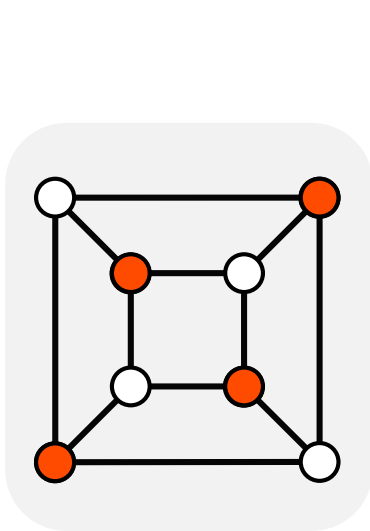
東京工業大学 工学院 情報通信系

1-3 (1) 2部グラフ

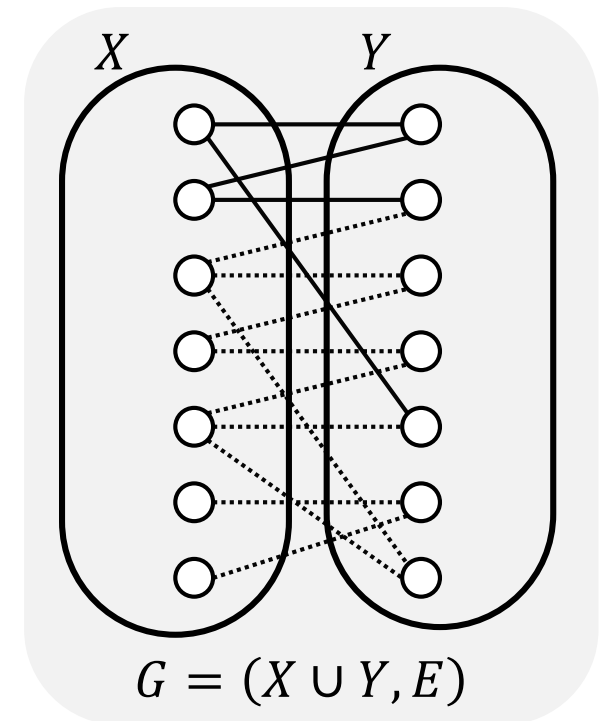
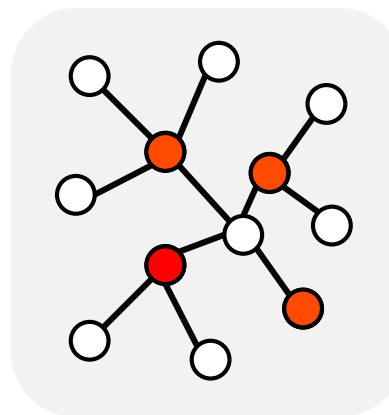
■ 点集合が二つの独立点集合に分割できる

- $G = (X \cup Y, E)$
- $\{X, Y\}$ は $V(G)$ の2分割
- X, Y はそれぞれ独立点集合

➤ 独立点集合: 任意の2点が隣接しない



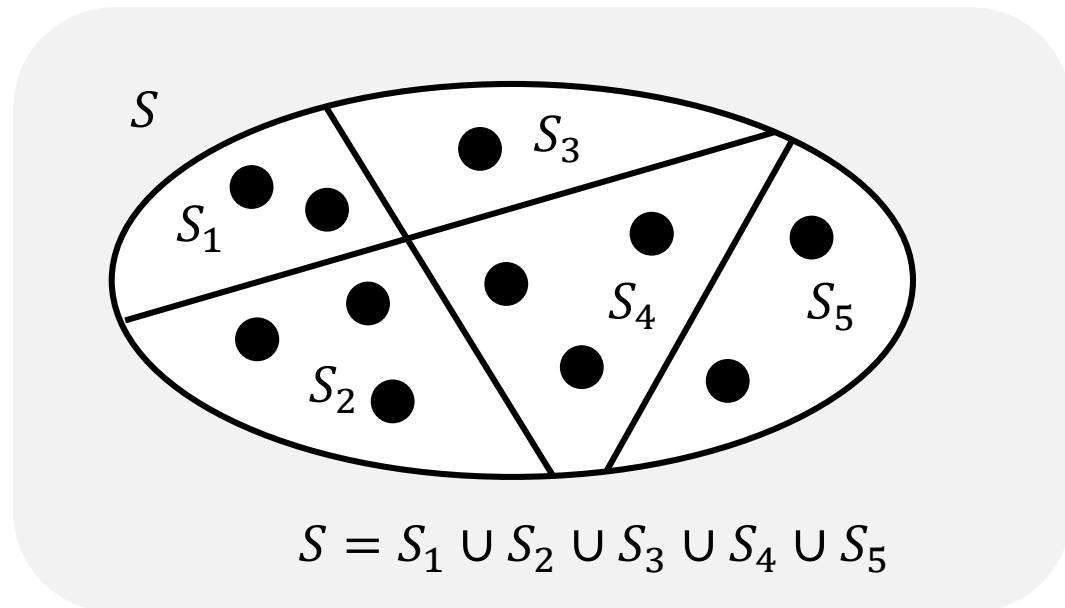
● $\in X$
○ $\in Y$



集合の分割 (確認)

■ 分割 (Partition)

- $S_1, S_2, \dots, S_k$: non-empty subsets of S
- $(S_1, S_2, \dots, S_k)$: partition of S if
 - $S_i \cap S_j = \emptyset$
 - $\bigcup_{i=1}^k S_i = S$



2部グラフの性質

■ **定理** (Theorem 1.10) 2部グラフ $\Leftrightarrow$ 奇閉路を含まない

□ 証明 :

➤ 必要条件 ($\Rightarrow$)

- 任意の2部グラフ $G = (X \cup Y, E)$ を仮定

■ X, Y は G の独立点集合

■ $\{X, Y\}$ は $V(G)$ の2分割

- 任意の G の閉路 $C = (v_0, v_1, \dots, v_k, v_0)$

■ 一般性を失わず $v_0 \in X$ と仮定

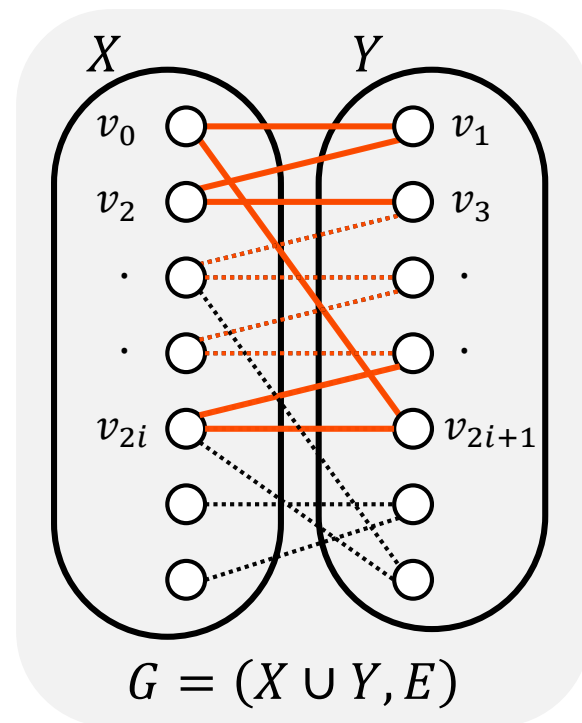
$$\Rightarrow v_{2i} \in X, v_{2i+1} \in Y \quad (i \in \mathbb{N})$$

■ k は奇数

■ C の長さ (辺数) は偶数

■ C は偶閉路

$\therefore$ すべての閉路は偶閉路



2部グラフの性質

■ **定理 (Theorem 1.10)** 2部グラフ $\iff$ 奇閉路を含まない

□ 証明 :

➤ 十分条件 ($\Leftarrow$) 連結グラフについて考えれば十分

- 連結グラフ $G = (V, E)$ は奇閉路を含まないと仮定

■ $X = \{v \in V \mid \text{dis}_G(u, v) \text{ が偶数} \}$, $Y = \{v \in V \mid \text{dis}_G(u, v) \text{ が奇数} \}$

■ $\{X, Y\}$ は V の2分割

➤ 任意の $a, b \in X$ は隣接しないことを示す

- $P = (P_0, P_1)$: 最短 (u, a) 路

■ $P_0 = (u, \dots, u_1), P_1 = (u_1, \dots, a)$

- $Q = (Q_0, Q_1)$: 最短 (u, b) 路

■ $Q_0 = (u, \dots, u_1), Q_1 = (u_1, \dots, b)$

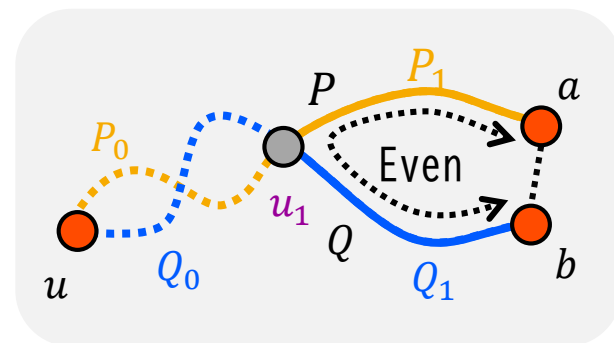
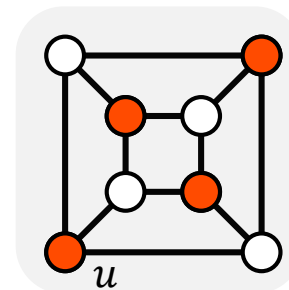
➤ u_1 : P, Q の最後の共有点

- $|P_0| = |Q_0|$ $\because$ 異なれば, 最短路より短い路が存在

- $|P_1|$ と $|Q_1|$ の偶奇は等しい $\Rightarrow |P_1| + |Q_1|$ は偶

- $(a, b) \in E \Rightarrow (P_1, (a, b), Q_1)$ は奇閉路 $\Rightarrow$ 仮定に反する
 $\therefore (a, b) \notin E$

➤ $\forall c, d \in Y$ についても同様に $(c, d) \notin E$ ■



距離の偶奇による2分割は一意か？

■ 連結グラフ $G = (V, E)$

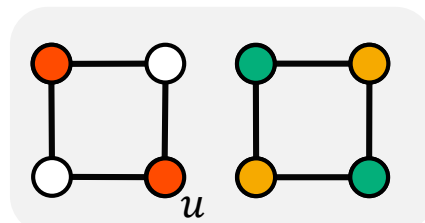
- 点 $u \in V$ からの距離の偶奇による点集合 V の2分割 $\{X, Y\}$

■ $X = \{v \in V \mid \text{dis}_G(u, v) \text{ が偶数}\}$, $Y = \{v \in V \mid \text{dis}_G(u, v) \text{ が奇数}\}$

➤ 2部グラフ $\Rightarrow$ それぞれ独立点集合

✓ 非連結

- 点 u からの距離 ∞ (u と異なる連結成分) の点はどちらに X, Y 属す？
- 各連結成分ごと2分割 $\Rightarrow$ 独立点集合への2分割に多様性あり



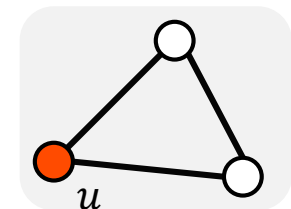
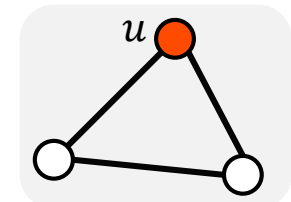
$\{\text{orange, green}, \text{white, yellow}\}$
 $\{\text{orange, yellow}, \text{white, green}\}$

- 点 u の選び方により2分割 $\{X, Y\}$ は異なるか？

■ 2部グラフでない $\Rightarrow$ 異なる

■ 2部グラフ $\Rightarrow$ 同じ (2分割は一意)

- 距離が互いに偶である点の集合



距離の偶奇による2分割

■ 距離が互いに偶である点の集合

➤ $u \sim_E v$: $\text{dis}_G(u, v)$ が偶数である関係 (偶距離関係)

■ 反射律 : $\forall u \in S \quad (u \sim_E u)$

- 成立

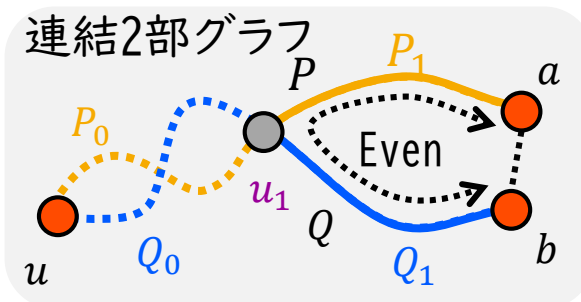
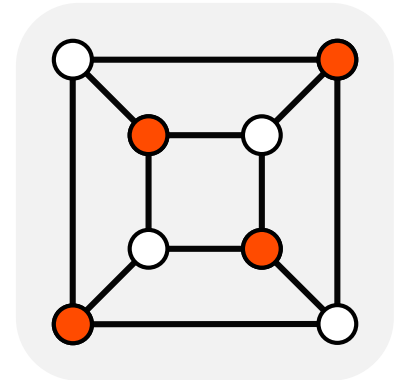
■ 対称律 : $\forall u, v \in S \quad (u \sim_E v \Rightarrow v \sim_E u)$

- 無向グラフで成立

■ 推移律 : $\forall u, v, w \in S \quad (u \sim_E v, v \sim_E w \Rightarrow u \sim_E w)$

- 連結2部グラフで成立

■ $a \sim_E u, u \sim_E b \Rightarrow a \sim_E b$



$\text{dis}_G(a, b)$ が奇ならば奇閉路が存在
(P_1, Q_1) は長さ偶の (a, b) 路
最短 (a, b) 路でないかもしれない

- 連結2部グラフで偶距離関係 $\sim_E$ は同値関係

距離の偶奇による2分割

■ 距離が互いに偶である点の集合

➤ $u \sim_E v$: $\text{dis}_G(u, v)$ が偶数である関係 (偶距離関係)

- 連結2部グラフで偶距離関係 $\sim_E$ は同値関係

■ $V / \sim_E = \{[u]_{\sim_E} \mid u \in V\} = \{X, Y\}$

- 偶距離関係 $\sim_E$ による商集合

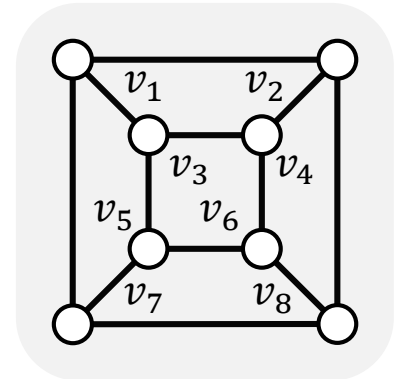
■ 同値類からなる集合

■ $[u]_{\sim_E} = \{v \mid u \sim_E v\}$

- 点 $u \in V$ からの距離の偶奇による2分割

■ 連結2部グラフ $\Rightarrow$ 点の選択によらず2分割は一意

■ 点 u の選択によらず $\{X, Y\}$ は一意



$$\begin{aligned} V / \sim_E &= \{[v_1], [v_2], \dots, [v_8]\} \\ &= \{[v_1], [v_2]\} \\ &= \{X, Y\} \end{aligned}$$

同値類は分割を与える (確認)

■ **定理**: 集合 A 上の同値関係 $\equiv$ の同値類 $[x] = \{b \mid x \equiv b\}$

- $\forall x, y \in A, [x] = [y]$ または $[x] \cap [y] = \emptyset$

□ **証明**

- $[x] \cap [y] = \emptyset \Rightarrow$ 証明終了

➤ $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y]$ を示す

➤ $\exists b \in [x] \cap [y] \Rightarrow \forall c \in [x], c \in [y]$ を示す

■ $b \in [x] \cap [y] \Rightarrow x \equiv b, y \equiv b$

■ $x \equiv b \Rightarrow b \equiv x$ (対称律 $a \equiv b \Rightarrow b \equiv a$)

■ $y \equiv b, b \equiv x \Rightarrow y \equiv x$ (推移律 $a \equiv b, b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$)

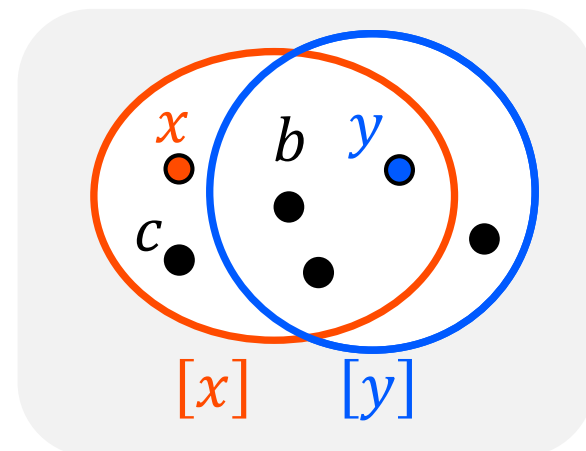
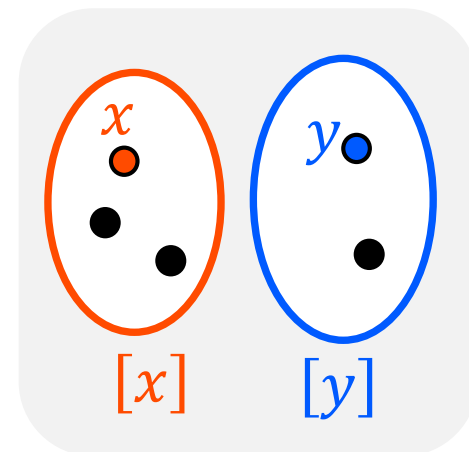
■ $c \in [x] \Rightarrow x \equiv c$

■ $y \equiv x, x \equiv c \Rightarrow y \equiv c \Rightarrow c \in [y]$ (推移律)

■ $\forall c \in [x], c \in [y] \Rightarrow [x] \subseteq [y]$

- 同様に $[y] \subseteq [x]$ が成り立つ

■ $[x] \subseteq [y], [y] \subseteq [x] \Rightarrow [x] = [y]$



同値類は分割を与える (確認)

■ **定理**: 集合 A 上の同値関係 $\equiv$ の同値類 $[x] = \{b \mid x \equiv b\}$

- $\forall x, y \in A, [x] = [y]$ または $[x] \cap [y] = \emptyset$

□ **証明**

- $[x] \cap [y] = \emptyset \Rightarrow$ 証明終了

➤ $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y]$ を示す

➤ $\exists b \in [x] \cap [y] \Rightarrow \forall c \in [x], c \in [y]$ を示す

■ $b \in [x] \cap [y] \Rightarrow x \equiv b, y \equiv b$

■ $x \equiv b \Rightarrow b \equiv x$ (対称律 $a \equiv b \Rightarrow b \equiv a$)

■ $y \equiv b, b \equiv x \Rightarrow y \equiv x$ (推移律 $a \equiv b, b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$)

■ $c \in [x] \Rightarrow x \equiv c$

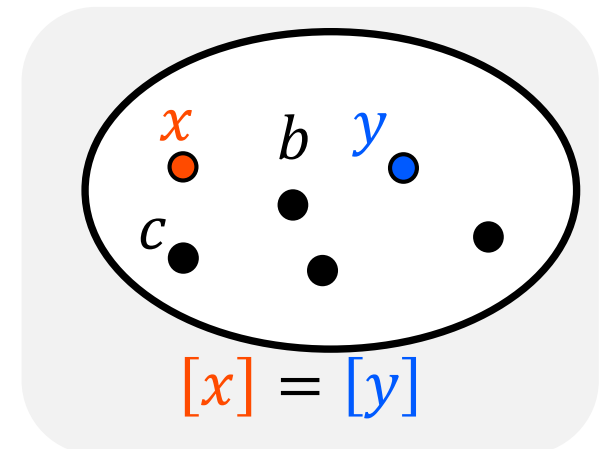
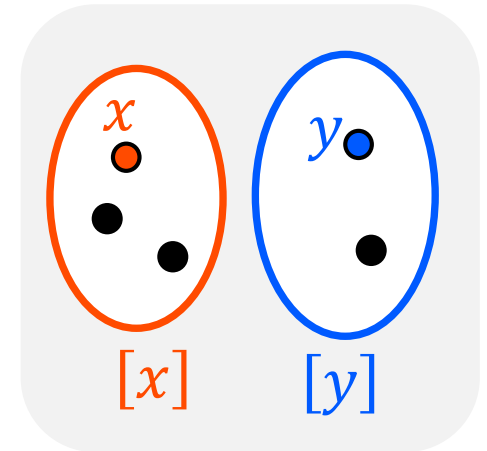
■ $y \equiv x, x \equiv c \Rightarrow y \equiv c \Rightarrow c \in [y]$ (推移律)

■ $\forall c \in [x], c \in [y] \Rightarrow [x] \subseteq [y]$

- 同様に $[y] \subseteq [x]$ が成り立つ

■ $[x] \subseteq [y], [y] \subseteq [x] \Rightarrow [x] = [y]$ ■

- $\forall a, a \in [a]$ (反射律 $a \equiv a$)



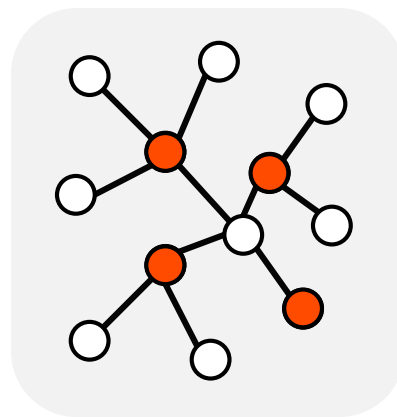
2部グラフの性質

■ 系

- 木は2部グラフ

□ 証明

- 木は閉路を含まないので, 奇閉路を含まない. ■



1-3 (2) グラフの彩色 (coloring)

■ グラフ $G = (V, E)$

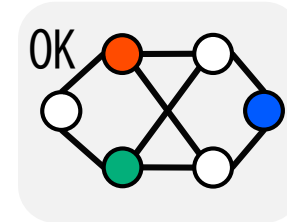
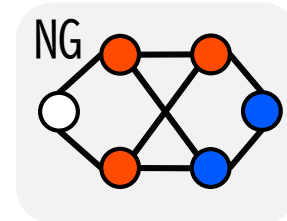
- 彩色 $c: V \rightarrow C$

■ 点へ色を割り当てる

■ 隣接する点には異なる色

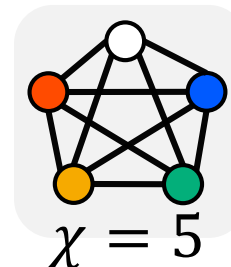
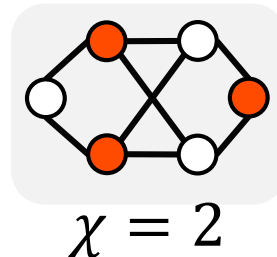
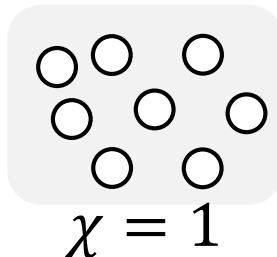
- $\forall (u, v) \in E, c(u) \neq c(v)$

➤ 辺への彩色を考えることもある



■ 彩色数 (chromatic number) $\chi(G)$

- 彩色に必要な色の最小数



彩色の特徴付け

■ 彩色数 $\chi(G)$

- 0 $\Leftrightarrow$ 空グラフ
- 1 $\Leftrightarrow$ 辺なし
- 2以下 $\Leftrightarrow$ 2部グラフ
- 3以下 $\Leftrightarrow$?
 - 様々な十分条件は知られている
 - 自明でない必要十分条件は不明

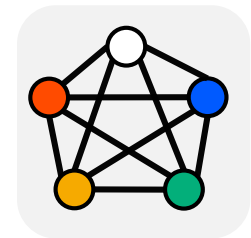
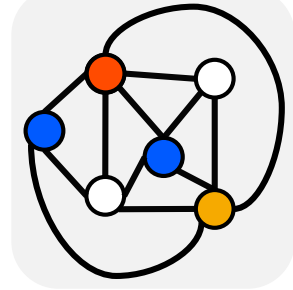
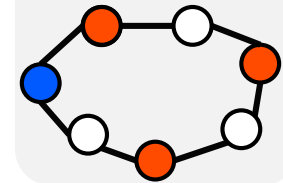
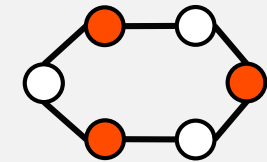
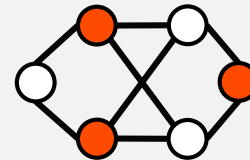
- 偶閉路 $\Rightarrow$ 2彩色可
- 奇閉路 $\Rightarrow$ 3彩色可
- 平面グラフ $\Rightarrow$ 4彩色可(1976年に証明)
- n 点完全グラフ $K_n \Rightarrow n$ 彩色

■ 一般のグラフに対して

- 3彩色できるか否か判定せよ $\Rightarrow$ 難しい(NP完全)

$$G = (\emptyset, \emptyset)$$

$$G = (V, \emptyset), V \neq \emptyset$$



K_5

平面的グラフ (Planar Graph)

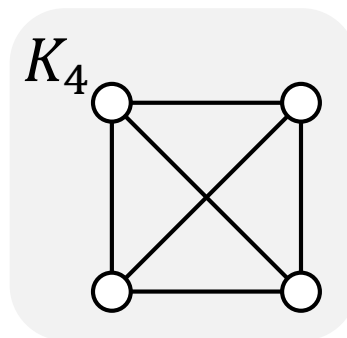
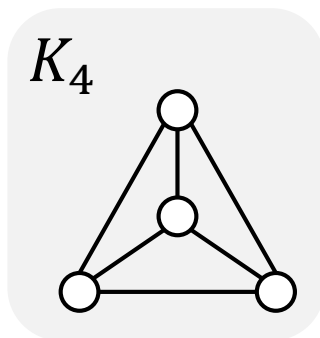
■ 平面的グラフ (Planar Graph)

- 平面に点は重ならず辺は交差せず描画できるグラフ
 - 辺は端点でのみ他辺と接する

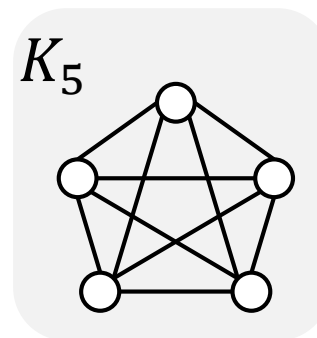
■ 平面グラフ (Plane Graph)

- 平面に点は重ならず辺は交差せず描画されたグラフ

➤ K_n は平面的 $\Leftrightarrow$ (if and only if) $n \leq 4$



planar

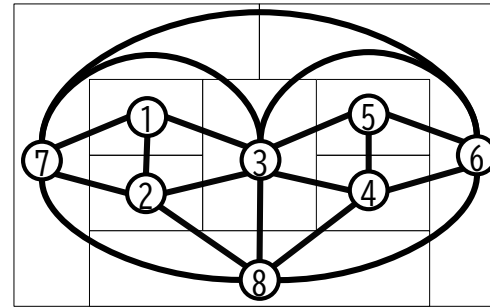
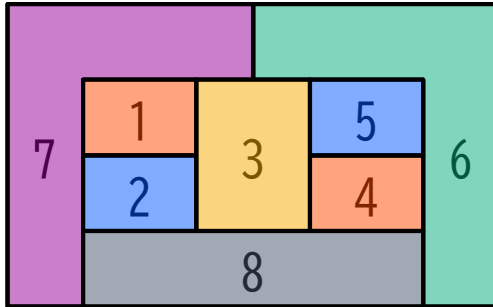


non-planar

彩色の応用

■ 地図の塗り分け

- 隣接する領域は異なる色



■ グラフの彩色として定式化できる

- 領域を点, 隣接する領域に対応する点間に辺とするグラフの彩色

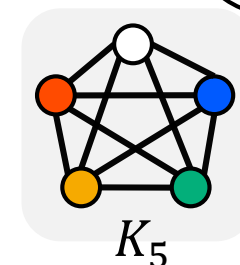
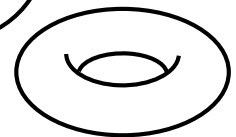
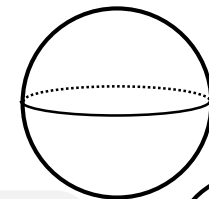
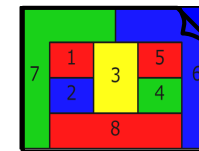
- 四色問題 (四色定理)

■ 地図の塗り分けは4色あれば十分

- 平面上, 飛び地なし (塗り方への制約なし)
- 地球儀 (球面) 上は何色必要?
- 円環 (トーラス, ドーナツ) 上は何色必要?

■ 携帯電話の周波数割り当て

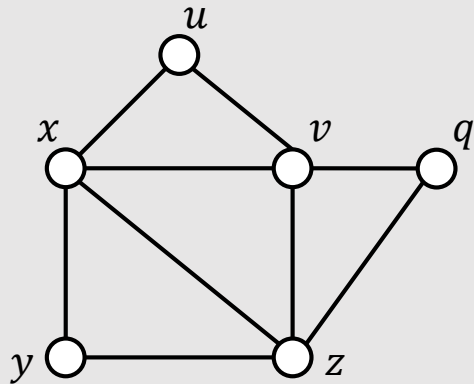
- 隣接領域で同一周波数は使えない



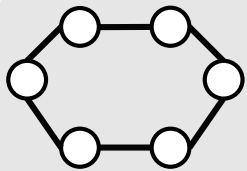
1-4 (1) オイラーグラフ

■ オイラー閉トレイルを持つグラフ

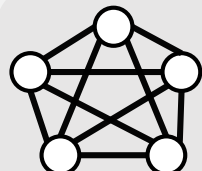
✓ 一筆書きで始点に戻る



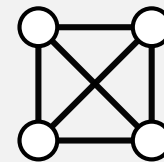
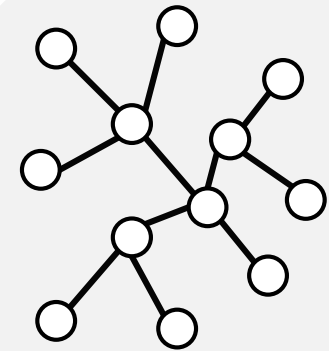
Eulerian graphs



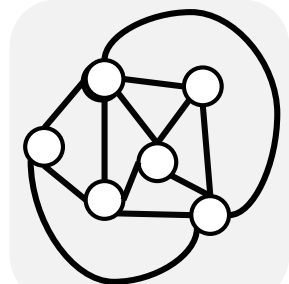
C_6



K_5



K_4



Non-Eulerian graphs

オイラートレイル (Euler Trail)

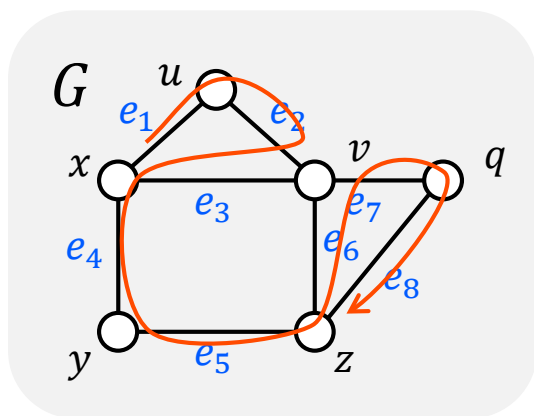
■ すべての辺を通るトレイル

✓ すべての辺をちょうど1回通る

$$P = (x, e_1, u, e_2, v, e_3, x, e_4, y, e_5, z, e_6, v, e_7, q, e_8, z)$$

$$P = (x, u, v, x, y, z, v, q, z)$$

is an Euler trail in G



オイラー閉トレイル (Euler Closed Trail)

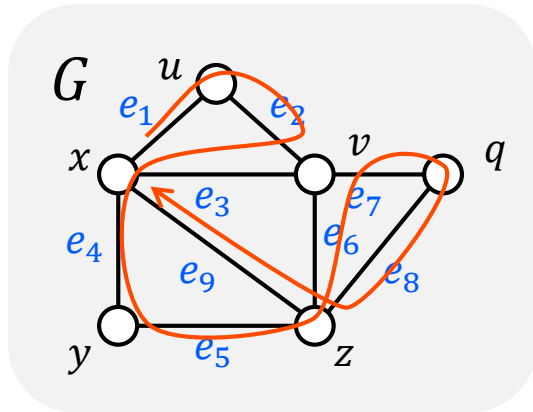
■ すべての辺を通る閉トレイル

✓ すべての辺をちょうど1回通る

$$P = (x, e_1, u, e_2, v, e_3, x, e_4, y, e_5, z, e_6, v, e_7, q, e_8, z, e_9, x)$$

$$P = (x, u, v, x, y, z, v, q, z, x)$$

is an Euler closed trail in G

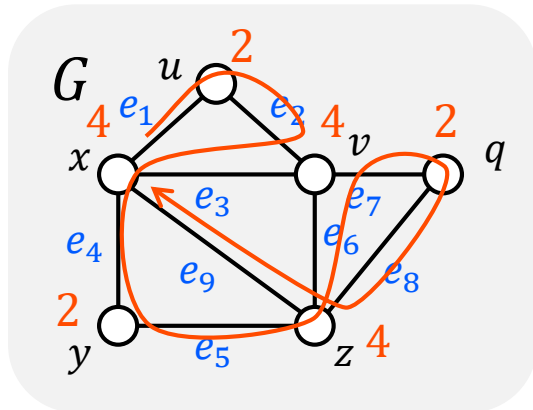


オイラーグラフ

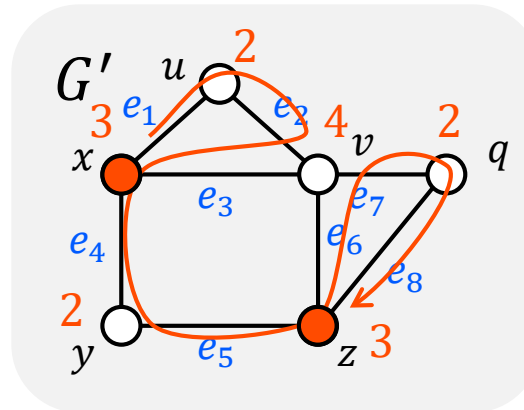
■ オイラー閉トレイルを持つグラフ

- すべての辺を通る閉トレイル
- ✓ 連結で奇点 (次数が奇数である点) を持たないグラフ

オイラーグラフ



オイラーグラフではない



Seven Bridges of Königsberg

128

SOLVTIO PROBLEMATIS
SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. I.

Tabula VIII.

PRaeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates versatur, et omni tempore summo studio est excolta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam situs vocauit. Ista pars ab ipso in solo situ determinando, situsque proprietatibus eruendis occupata esse statuitur; in quo negotio neque ad quantitates respiciendum, neque calculo quantitatum vtendum sit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc situs Geometriam pertineant, et quali methodo in iis resoluendis vti oporteat, non satis est definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio esset facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, vt neque determinationem quantitatum requireret, neque solutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam situs referre haud dubitauit: praesertim quod in eius solutione solus situs in considerationem veniat, calculus vero nullius prorsus sit vsus. Methodum ergo meam quam ad huius generis problemata

Seven Bridges of Königsberg

L. EULER

SOLUTIO PROBLEMATIS AD GEOMETRIAM SITUS PERTINENTIS

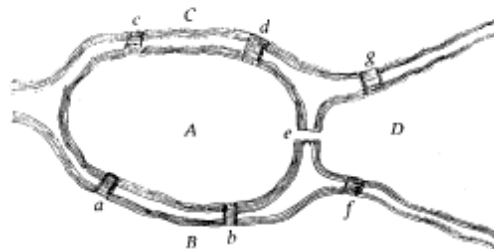
[The solution of a problem relating to the geometry of position]

Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 8 (1736), 128–140.

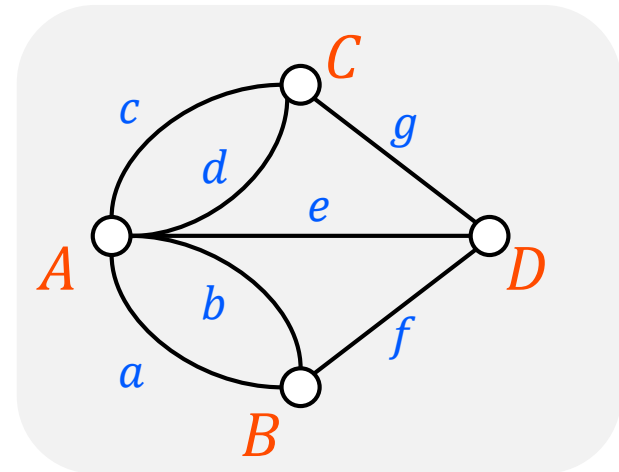
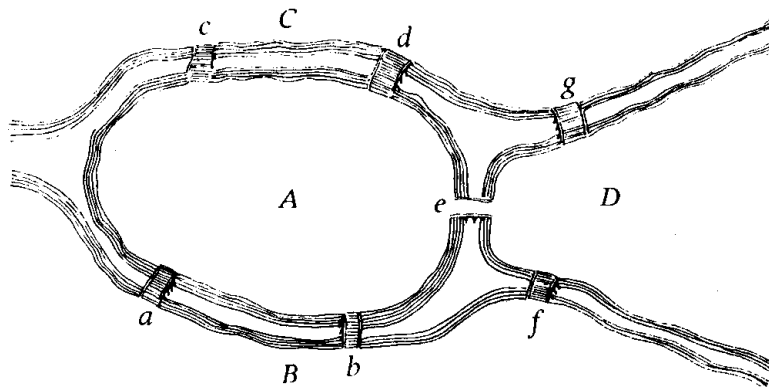
1. In addition to that branch of geometry which is concerned with magnitudes, and which has always received the greatest attention, there is another branch, previously almost unknown, which Leibniz first mentioned, calling it the *geometry of position*. This branch is concerned only with the determination of position and its properties; it does not involve measurements, nor calculations made with them. It has not yet been satisfactorily determined what kind of problems are relevant to this geometry of position, or what methods should be used in solving them. Hence, when a problem was recently mentioned, which seemed geometrical but was so constructed that it did not require the measurement of distances, nor did calculation help at all, I had no doubt that it was concerned with the geometry of position—especially as its solution involved only position, and no calculation was of any use. I have therefore decided to give here the method which I have found for solving this kind of problem, as an example of the geometry of position.

2. The problem, which I am told is widely known, is as follows: in Königsberg in Prussia, there is an island *A*, called the *Kneiphof*; the river which surrounds it is divided into two branches, as can be seen in Fig. [1.2], and these branches are crossed by seven bridges, *a, b, c, d, e, f* and *g*. Concerning these bridges, it was asked whether anyone could arrange a route in such a way that he would cross each bridge once and only once. I was told that some people asserted that this was impossible, while others were in doubt; but nobody would actually assert that it could be done. From this, I have formulated the general problem: whatever be the arrangement and division of the river into branches, and however many bridges there be, can one find out whether or not it is possible to cross each bridge exactly once?

3. As far as the problem of the seven bridges of Königsberg is concerned, it can be solved by making an exhaustive list of all possible routes, and then finding



Seven Bridges of Königsberg



オイラーの定理

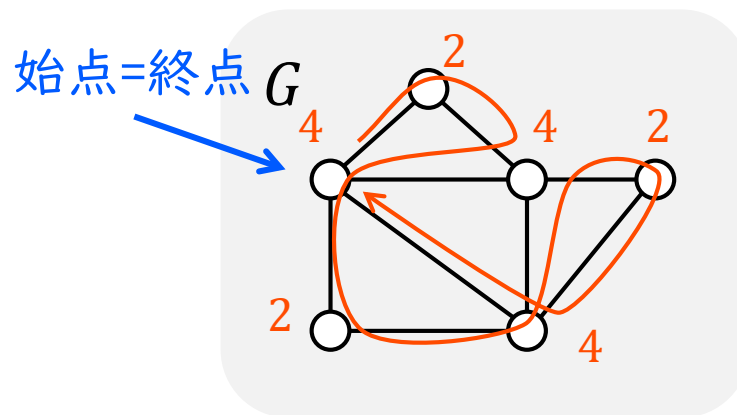
■ 定理 (Theorem 1.11) 連結グラフ

- オイラーグラフ $\Leftrightarrow$ 奇点なし

□ 証明 :

➤ 必要条件 ($\Rightarrow$)

- オイラー閉トレイルをたどる
 - 辺を追加する=次数が増える
- 初期状態 : 次数は0 (偶)
 - 始点 +1
 - 経由点 +2 (偶奇は保存)
 - 終点 +1 (始点と同じ, 併せて偶)



オイラーの定理

■ 定理 (Theorem 1.11) 連結グラフ

- オイラーグラフ $\Leftrightarrow$ 奇点なし

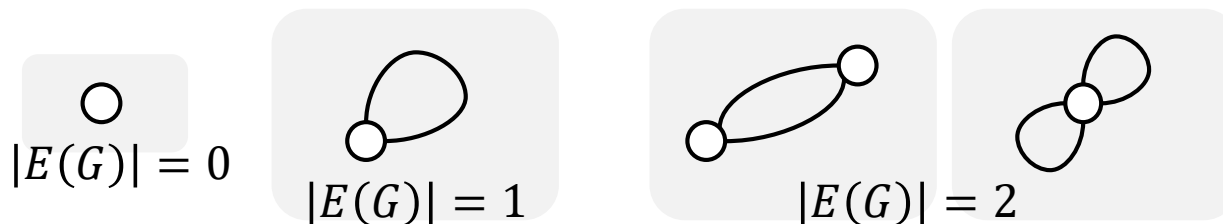
□ 証明：

➤ 十分条件 ($\Leftarrow$)

■ 辺数に関する数学的帰納法

- 初期段階： $|E(G)| \leq 2$

■ オイラーグラフ (単純グラフでない場合も含め)



全点の次数が偶のグラフ

オイラーの定理

■ 定理 (Theorem 1.11) 連結グラフ

- オイラーグラフ $\Leftrightarrow$ 奇点なし

□ 証明 :

■ 辺数に関する数学的帰納法

- 帰納段階: $|E(G)| \geq 3$

- 任意の辺数 $m (\geq 3)$ 奇点なしの連結グラフ G はオイラーグラフを示す

- 仮定: 辺数 $m - 1$ 以下奇点なしの連結グラフ $\Rightarrow$ オイラーグラフ

- G の各点の次数は2以上 $\Rightarrow G$ は閉路 C を含む ($\because$ 補題1-1)

- G から C を取り除いて得たグラフ

- 奇点なし

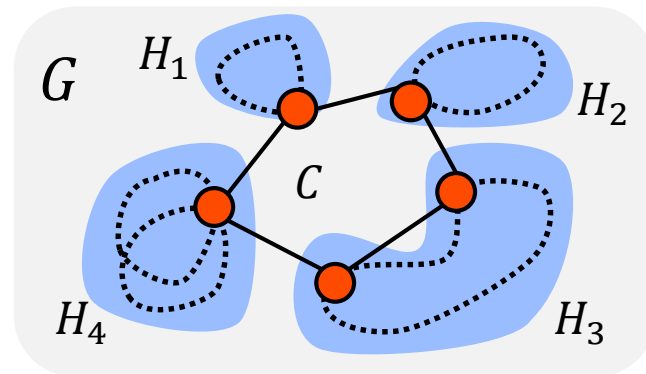
- 連結成分 $H_1, H_2, \dots, H_k$ の辺数 $m - 1$ 以下

- $H_1, H_2, \dots, H_k \Rightarrow$ オイラーグラフ ($\because$ 帰納法の仮定)

- G はオイラー閉トレイルを持つ

- C と $H_1, H_2, \dots, H_k$ のオイラー閉トレイルを組み合わせる

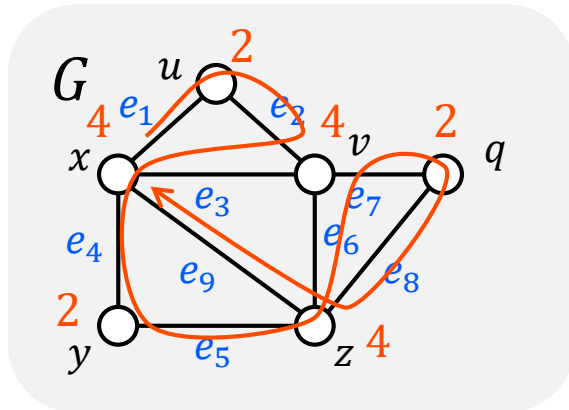
- G はオイラーグラフ ■



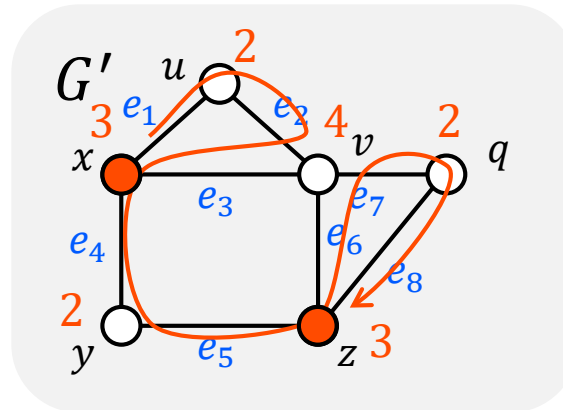
オイラーグラフ

- **定理**: オイラーグラフ $\Leftrightarrow$ 連結, すべて偶点
- **定理**: オイラートレイル $\Leftrightarrow$ 連結, 奇点は高々2個
- **定理**: K_n がオイラーグラフ $\Leftrightarrow n$ は奇数

オイラーグラフ



オイラーグラフではない



数え上げ(確認)

■ 順列

- n 要素からなる集合 S の要素による k -順列
- S の k -順列の総数

$$\blacksquare {}_nP_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

■ 例

- $S = \{1, 2, 3, 4\}$
 - S の2-順列
 - $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)$

数え上げ(確認)

■ 組合せ

- n 要素からなる集合 S の要素による k -組合せ
- S の k -組合せの総数

$$\blacksquare {}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{nP_k}{k!}$$

■ 例

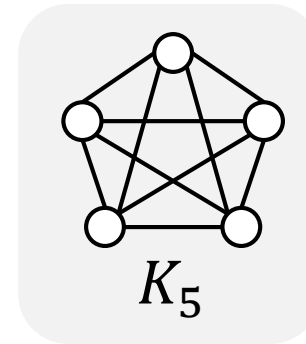
- $S = \{1, 2, 3, 4\}$
 - S の2-組合せ
 - $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$

1-4 (2) 完全グラフと完全2部グラフ

■ 完全グラフ K_n (点数 n) (complete graph)

- すべての2点が隣接

$$E(K_n) = \{(u, v) | u \in V(K_n), v \in V(K_n) \setminus \{u\}\}$$



■ 定理 (完全グラフの辺数)

$$|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

□ 証明(1):

$$|E(K_n)| = {}_nC_2 = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \blacksquare$$

□ 証明(2):

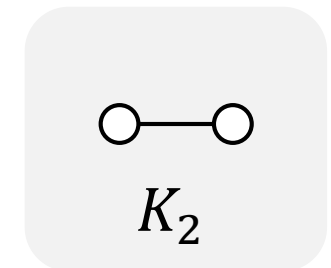
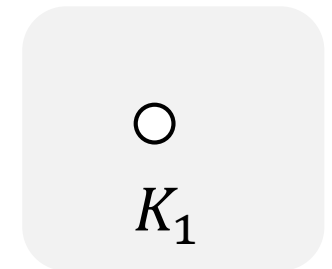
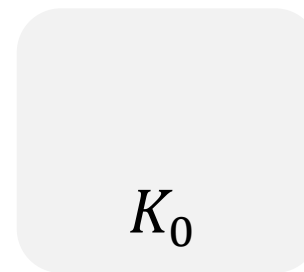
$$\deg_{K_n}(v) = n - 1, \forall v \in V(K_n)$$

$$\sum_{v \in V(K_n)} \deg_{K_n}(v) = 2|E(K_n)|$$

$$\sum_{v \in V(K_n)} (n - 1) = 2|E(K_n)|$$

$$n(n - 1) = 2|E(K_n)|$$

$$|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2} \blacksquare$$



完全2部グラフ

■ 完全2部グラフ $K_{p,q}$ (complete bipartite graph)

- 独立点集合 X, Y に対し, 任意の X の点と Y の点が隣接

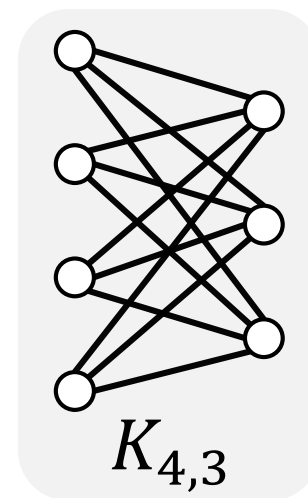
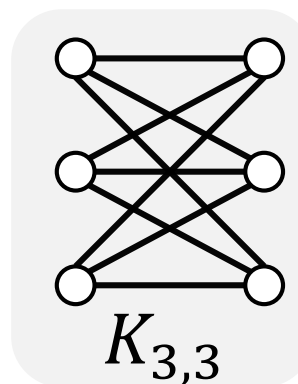
■ $V(K_{p,q}) = X \cup Y, X \cap Y = \emptyset$

- $p = |X|, q = |Y|$

■ $E(K_{p,q}) = \{(u, v) | u \in X, v \in Y\}$

■ 定理 (完全2部グラフの辺数)

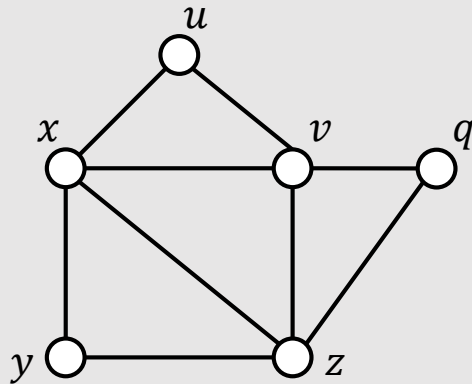
- $|E(K_{p,q})| = pq$



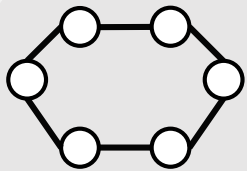
1-4 (3) ハミルトングラフ

■ ハミルトン閉路を持つグラフ

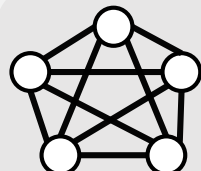
✓ 全点をちょうど1回通る閉路あり



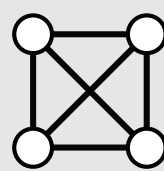
Hamilton graphs



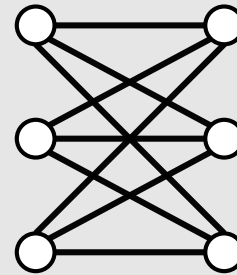
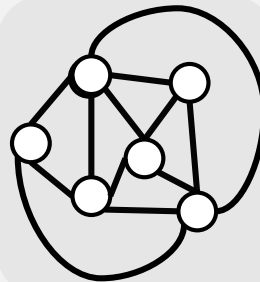
C_6



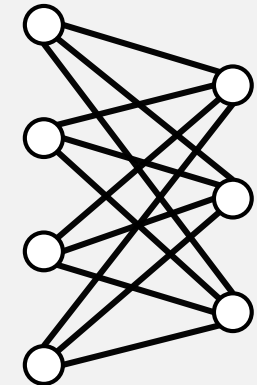
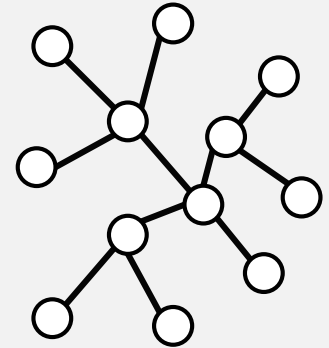
K_5



K_4



$K_{3,3}$



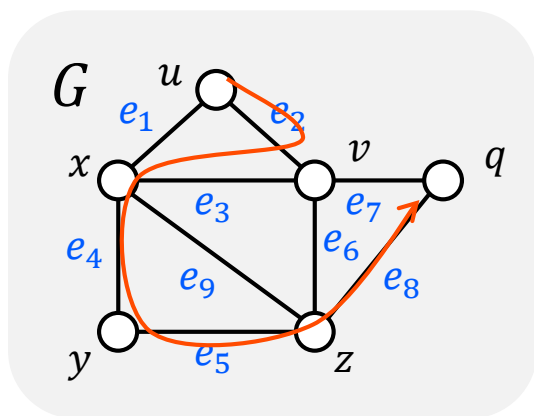
$K_{4,3}$

Non-Hamilton graphs

ハミルトン路(パス) (Hamilton path)

■ すべての点を通る路(パス)

✓ すべての辺をちょうど1回通る



$$P = (u, e_2, v, e_3, x, e_4, y, e_5, z, e_8, q)$$

$$P = (u, v, x, y, z, q)$$

is a Hamilton path in G

ハミルトン閉路 (Hamilton cycle)

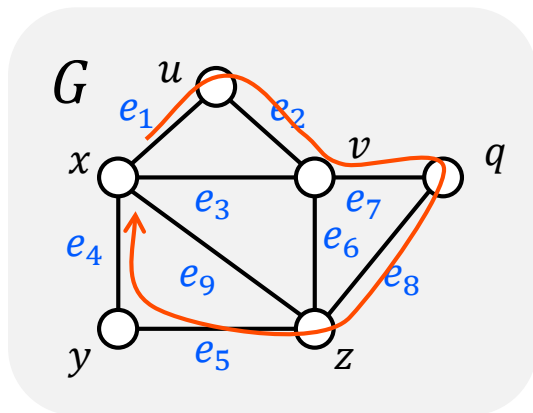
■ すべての点を通る閉路

✓ すべての点をちょうど1回通る

$$P = (x, e_1, u, e_2, v, e_7, q, e_8, z, e_5, y, e_4, x)$$

$$P = (x, u, v, q, z, y, x)$$

is a **Hamilton cycle** in G

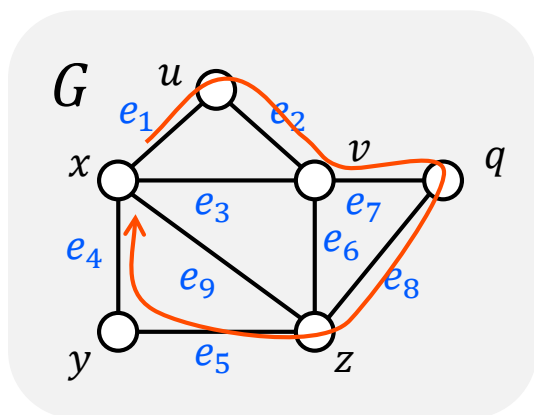


ハミルトングラフ

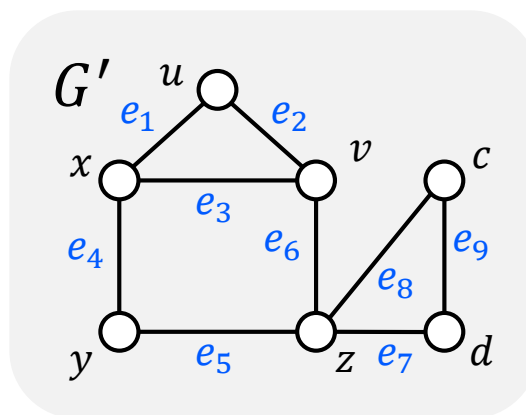
■ ハミルトン閉路を持つグラフ

- すべての点を通る閉路

ハミルトングラフ

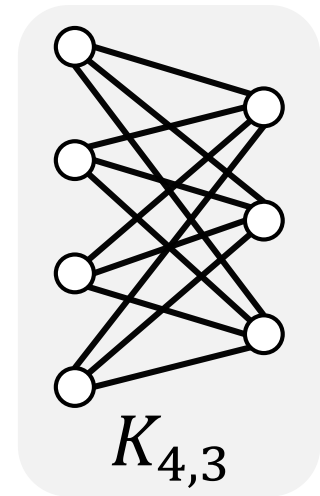
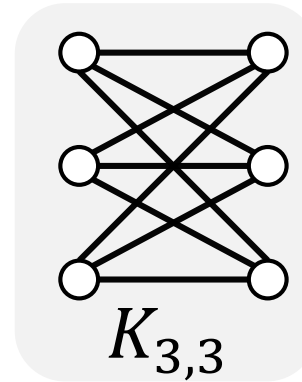
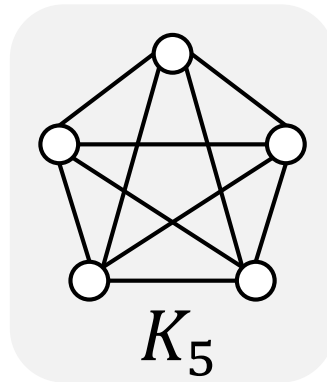
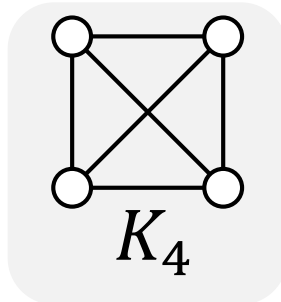
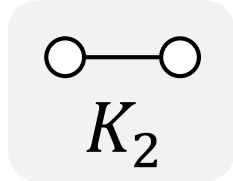
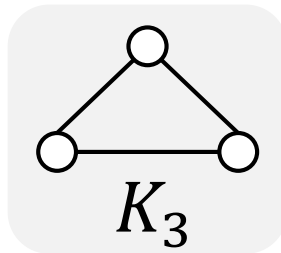


ハミルトングラフではない



グラフの性質

- **定理**: K_n ($n \geq 3$) はハミルトングラフ
- **定理**: $K_{p,q}$ はハミルトングラフ $\Leftrightarrow p = q$ (≥ 2)



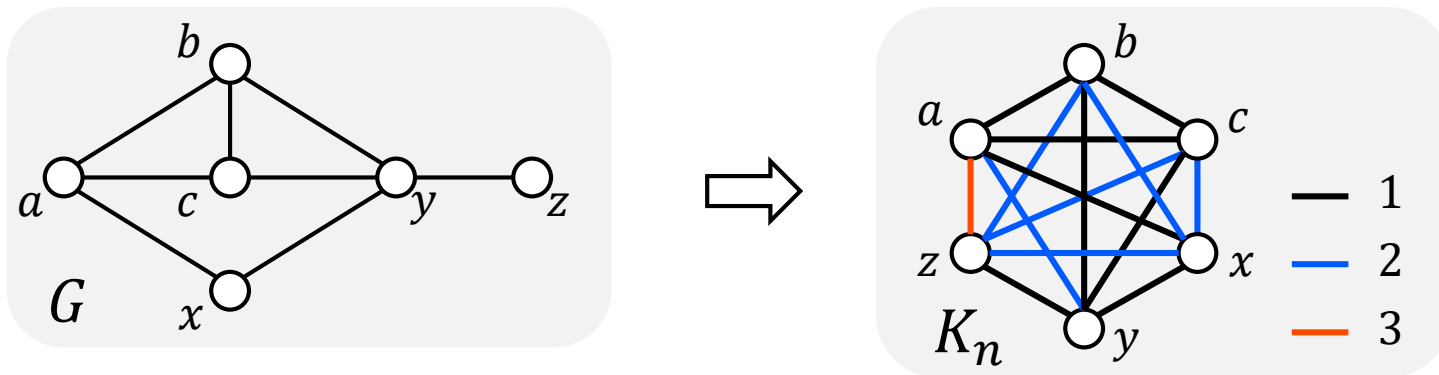
巡回セールスマン問題

- すべての街を訪問せよ
- 道のりの長さを最小化せよ

⇒ 完全グラフの **重み最小ハミルトン閉路問題**

に変換できる

- 2点間の距離を辺重みとする完全グラフを定義



ハミルトングラフ判定問題

■ G はハミルトングラフか

✓ 巡回セールスマン問題を用いて解ける

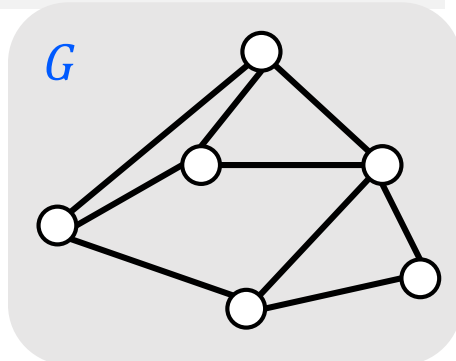
■ 巡回セールスマン問題の入力となるネットワーク (K_n, w) を作る

- G に辺あり $\Rightarrow$ 辺重み1
- G に辺なし $\Rightarrow$ 辺重み2

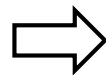
■ (K_n, w) の最小ハミルトン閉路重みで判定

巡回セールスマン問題の難しさ
✓ ハミルトングラフ判定問題と、
同じか、より難しい

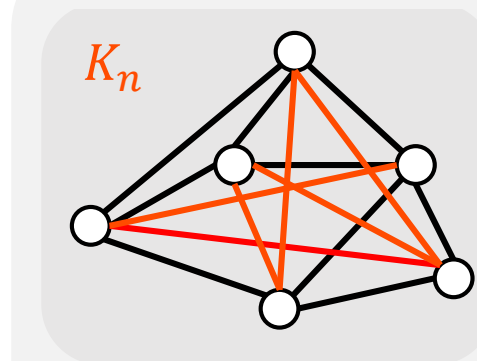
ハミルトングラフ判定問題



$$n = |V(G)|$$



巡回セールスマン問題



w

— 1 ($e \in E(G)$)
— 2 ($e \notin E(G)$)

ハミルトン閉路の重み $\begin{cases} n & G \text{の辺のみ} \\ \geq n+1 & \text{その他の辺含む} \end{cases}$

G はハミルトングラフ $\Leftrightarrow (K_n, w)$ の最小ハミルトン閉路の重みは n