



Tokyo Tech

離散構造とアルゴリズム (1-1) グラフ

高橋篤司

東京工業大学 工学院 情報通信系

1-1 (1) グラフ

■ 離散構造を表現する手段

- グラフ(graph): $G = (V, E)$

■ V : 点集合 (vertex set)

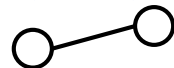
- 基本的には有限集合

■ E : 辺集合 (edge set) ($E \subseteq V \times V$)

- 有向辺: $(u, v) \neq (v, u) \Rightarrow$ 有向グラフ



- 無向辺: $(u, v) = (v, u) \Rightarrow$ 無向グラフ

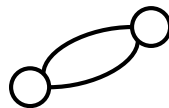


➤ (自己)ループ: 反射律に対応

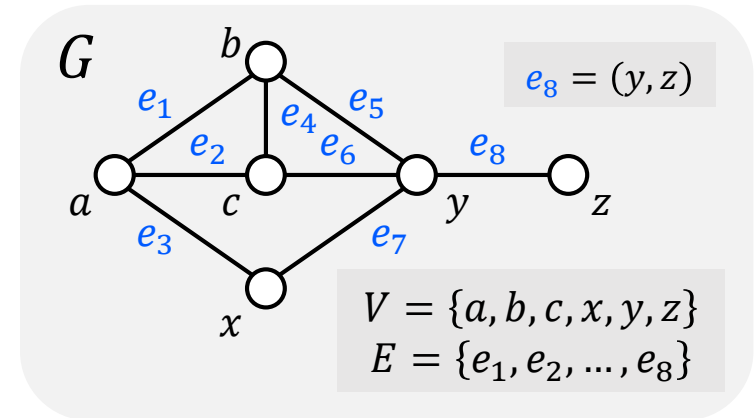


(v, v)

➤ 並列辺: 重複集合



$\{(u, v), (u, v)\} \neq \{(u, v)\}$



$n = |V|$: 点数
 $m = |E|$: 辺数

$V(G)$: グラフGの点集合
 $E(G)$: グラフGの辺集合

✓ 単純グラフ: ループ, 並列辺を持たないグラフ

グラフの表現

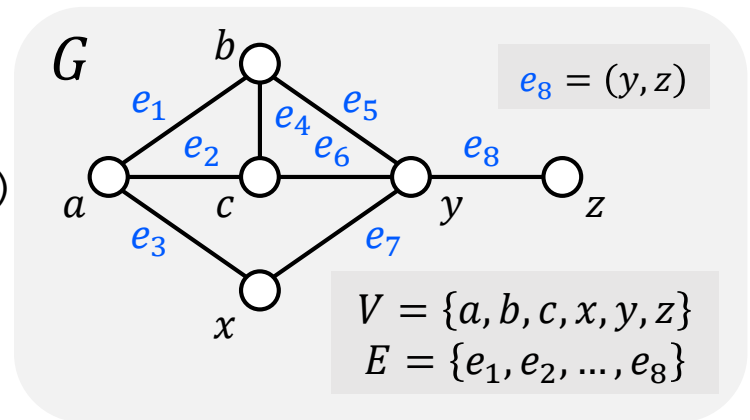
➤ 次数 $\deg_G(v)$: 点 v に接続する辺の数

■ 隣接行列 $A(G)$ [点×点] ($[n \times n]$)

- 点と点の隣接関係 (無向グラフ $\Rightarrow$ 対称行列)

	a	b	c	x	y	z	次数
a	0	1	1	1	0	0	3
b	1	0	1	0	1	0	3
c	1	1	0	0	1	0	3
x	1	0	0	0	1	0	2
y	0	1	1	1	0	1	4
z	0	0	0	0	1	0	1

行の「1」の和: 次数
列の「1」の和: 次数



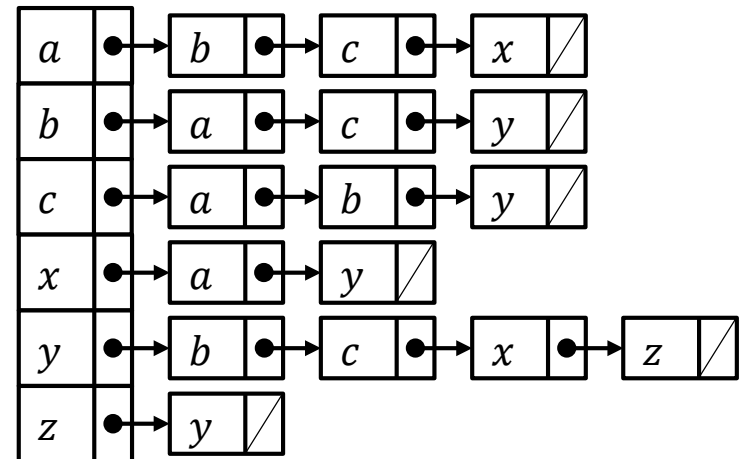
■ 接続行列 $B(G)$ [点×辺] ($[n \times m]$)

- 点と辺の接続関係

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	次数
a	1	1	1	0	0	0	0	0	3
b	1	0	0	1	1	0	0	0	3
c	0	1	0	1	0	1	0	0	3
x	0	0	1	0	0	0	1	0	2
y	0	0	0	0	1	1	1	1	4
z	0	0	0	0	0	0	0	1	1

行の「1」の和: 次数

隣接リスト



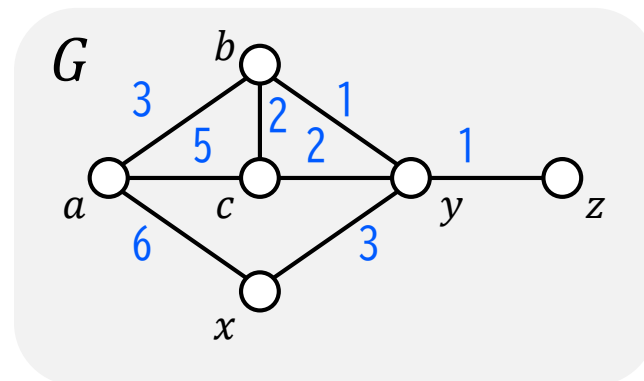
辺数が少ないグラフの効率よい表現

ネットワーク $N = (G, w)$

■ 辺に重みがついたグラフ

- 重み関数 : $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$

	a	b	c	x	y	z
a	0	3	5	6	∞	∞
b	3	0	2	∞	1	∞
c	5	2	0	∞	2	∞
x	6	∞	∞	0	3	∞
y	∞	1	2	3	0	1
z	∞	∞	∞	∞	1	0



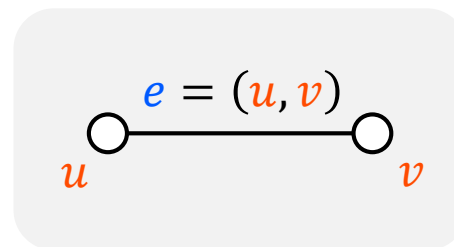
➤ 点に重みがついたグラフを考えることもある

■ 点重み $\Leftrightarrow$ 辺重みの変換は可能

点と辺

■ 点 u と点 v をつなぐ辺 e

- $e = (u, v)$
- 点 u, v は辺 e の端点(end vertices)



- 点と辺は接続(incident)
- 点と点は隣接(adjacent)

完全グラフ (Complete Graph)

■ 完全グラフ (Complete Graph)

- すべての異なる2点が隣接している(単純)グラフ

■ G は完全グラフ $\Leftrightarrow$

$$\forall u \in V(G) \forall v \in V(G) \setminus \{u\} (u, v) \in E(G) \wedge \forall v \in V(G) (v, v) \notin E(G)$$

■ G は完全グラフでない $\Leftrightarrow$

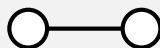
$$\exists u \in V(G) \exists v \in V(G) \setminus \{u\} (u, v) \notin E(G) \vee \exists v \in V(G) (v, v) \in E(G)$$

- K_n ($n \in \mathbb{N}$): n 点からなる完全グラフ

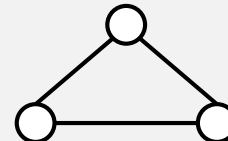
K_0



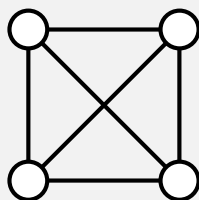
K_1



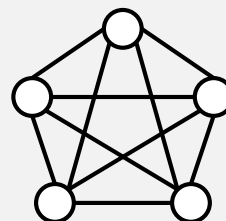
K_2



K_3



K_4



K_5

...

論理 (確認)

■ 命題

- 真であるか偽であるか判断できる文

■ 命題論理式

- 命題変数
 - 基本的な命題を表現
- 命題変数を論理結合子で結合
- 真理値 (ブール (Boolean) 集合)
 - $\{0, 1\} = \{F, T\} = \{\text{False}, \text{True}\} = \{\text{偽}, \text{真}\}$

■ 論理結合子

- 論理積 $\wedge$ (かつ)
- 論理和 $\vee$ (または)
- 否定 $\neg$ (でない)
- 含意 $\Rightarrow$ (ならば)
- 同値 $\Leftrightarrow$ (かつ, そのときに限り)

α	$\neg\alpha$	α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
		1	0	0	1	0	0
		1	1	1	1	1	1

論理 (確認)

■ 命題論理の性質

- 必要十分条件

$$\text{➤ } (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha) = (\alpha \Leftrightarrow \beta)$$

- 逆は真ならず

$$\text{➤ } (\alpha \Rightarrow \beta) \neq (\beta \Rightarrow \alpha)$$

- 金持ちは早起きだ

- 早起きは金持ちだ

- 対偶

$$\text{➤ } (\alpha \Rightarrow \beta) = (\neg \beta \Rightarrow \neg \alpha)$$

- 早起きでなければ金持ちでない

- ド・モルガン

$$\text{➤ } \neg(\alpha \wedge \beta) = \neg \alpha \vee \neg \beta$$

$$\text{➤ } \neg(\alpha \vee \beta) = \neg \alpha \wedge \neg \beta$$

α	β	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\beta \Rightarrow \alpha$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

α	β	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\neg \beta \Rightarrow \neg \alpha$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

α	β	$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\neg(\alpha \vee \beta)$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

論理 (確認)

■ 含意 $\Rightarrow$ (ならば)

- $\alpha \Rightarrow \beta$

■ 前件 α が偽ならば、命題は真

- 結合則は成り立たない

■ $((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma) \neq (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma))$

■ $\alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma$ とは書けない

■ α ならば β であるならば γ である

- 日常会話では使われるかもしれない
- 論理的には意味は不明確

■ α, γ が偽であるとき

- 「 α ならば β であるならば、 γ である」は偽
- 「 α ならば、 β であるならば γ である」は真

「夏ならば晴れであるならば暑い」は
「夏で晴れならば暑い」の意図?

α	β	γ	$(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma$	$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)$	$(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\beta \Rightarrow \gamma$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1

論理 (確認)

■ 述語論理

- 個体変数, 述語表現, 限量化

■ 述語表現 $P(a)$

■ 限量子

- 存在 $\exists a P(a)$: ある a に対して $P(a)$ が成立する (exists)
- 全称 $\forall a P(a)$: すべての a に対して $P(a)$ が成立する (for all)

➤ 日常会話

- 「みな持っている」は「持っている人がいる」を意図する？

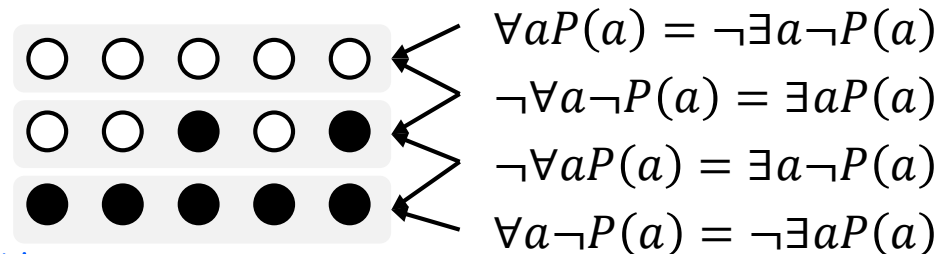
■ 述語論理の性質

➤ $\neg \forall a P(a) = \exists a \neg P(a)$

- 「皆持っている, ことはない」=「持っていない人がいる」

- $\forall a \neg P(a) = \neg \exists a P(a)$

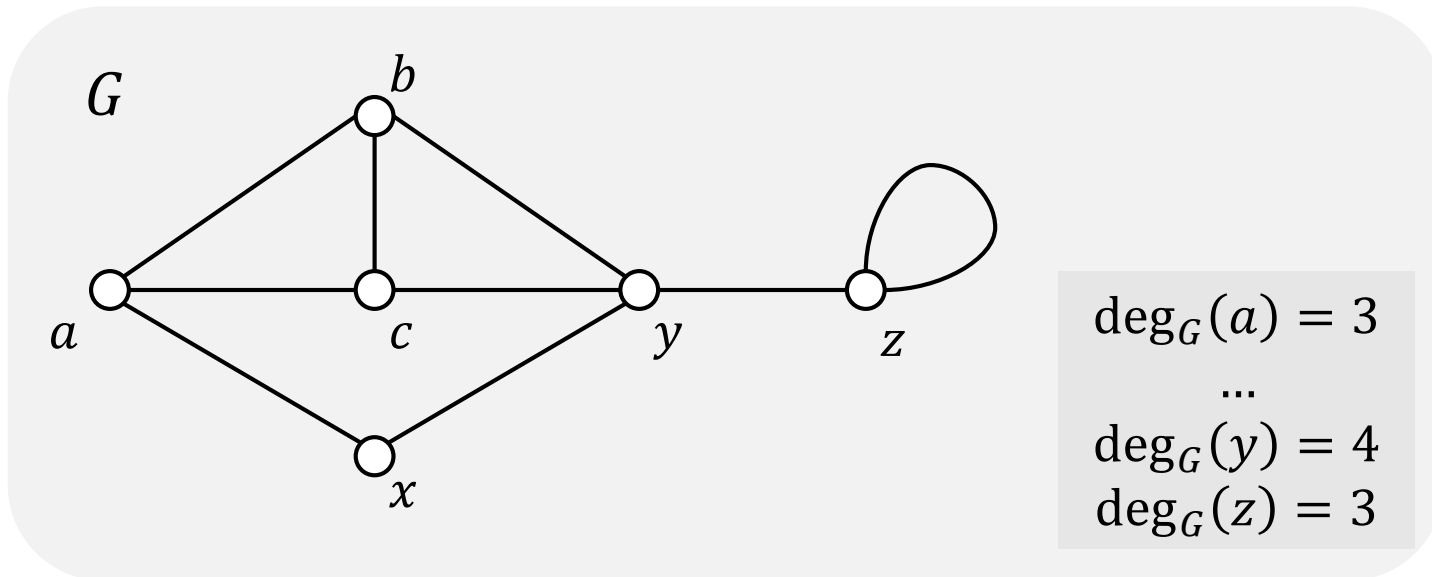
- 「誰も持っていない」=「持っている人がいる, ことはない」



1-1 (2) 基本的な定義

基本的な定義 (1) 次数(degree)

- **次数** $\deg_G(v)$: 点 v に接続する辺の数
 - ループは2回カウント

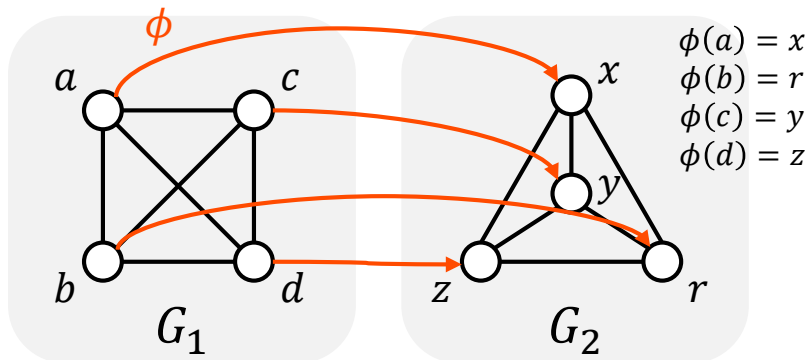


基本的な定義 (2) 同型(isomorphic)

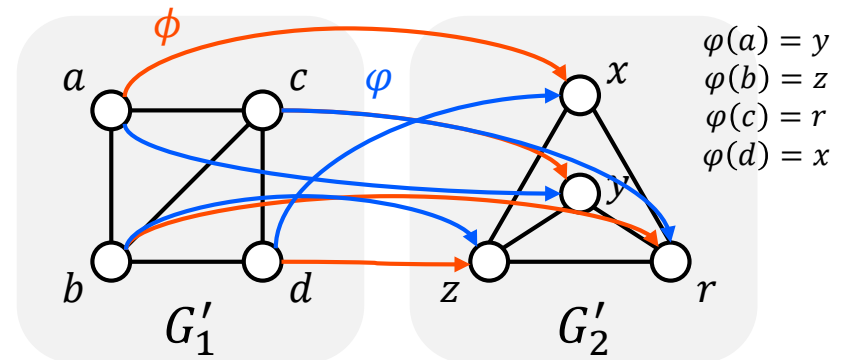
■ 同型 $G_1 \cong G_2$

- 同型写像 $\phi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$: が存在

■ 点間の隣接関係を保存する全単射



$G_1 \cong G_2$ (ϕ :同型写像)



$G'_1 \cong G'_2$ (ϕ :同型写像)

- 同型であるための**必要条件**

- 点数、辺数が等しい
- 次数系列が等しい
- ...

G'_1 の次数系列 : (3, 3, 2, 2)

G'_2 の次数系列 : (3, 3, 2, 2)

- 同型であるための**必要十分条件**?

写像 (関数) (確認)

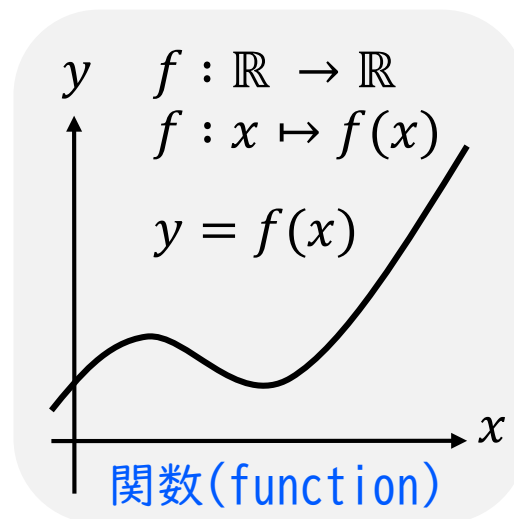
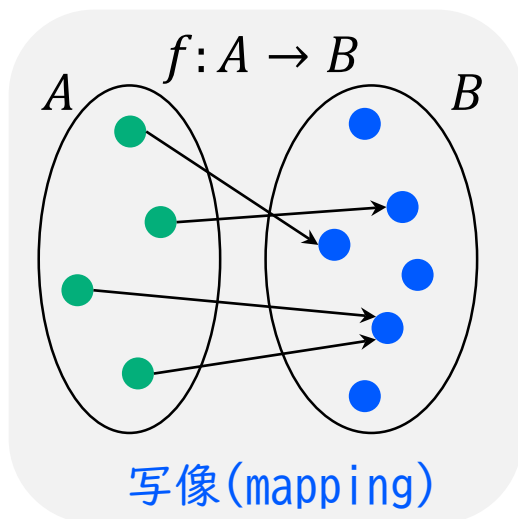
■ 集合 A (定義域) から集合 B (値域) への写像 f

- $\forall a \in A$ がそれぞれ, ある要素 $b \in B$ に対応

➤ $f: A \rightarrow B$ 定義域と値域を表す

➤ $f: a \mapsto b$ 要素の対応を表す

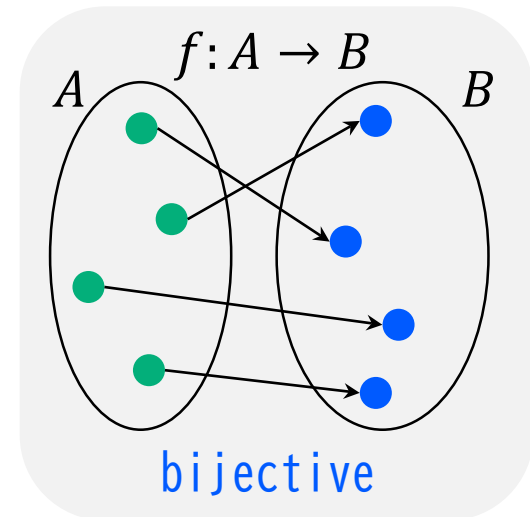
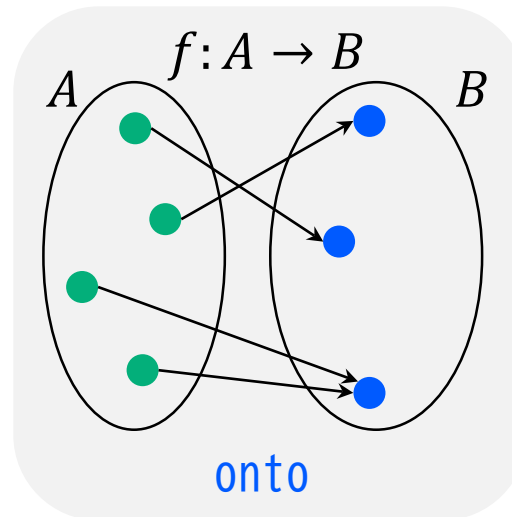
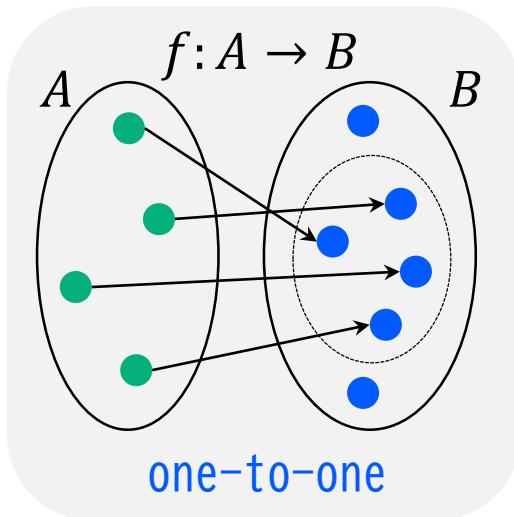
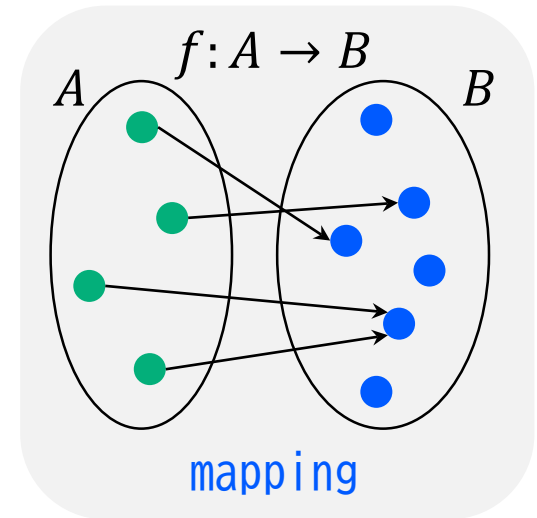
➤ $y = f(x)$



写像の特徴づけ (確認)

■ 写像 $f: A \rightarrow B$

- 単射(injection), 一対一(one-to-one)
 - A の異なる要素は異なる像を持つ
 - $\forall a, b \in A, a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
- 全射(surjection), 上への対応(onto)
 - B のすべての要素は A のある要素の像
 - $\forall b \in B, \exists a \in A, b = f(a)$
- 全単射(bijection)
 - 単射かつ全射



基本的な定義 (3) 部分グラフ(subgraph)

■ グラフ G の部分グラフ H ($\subseteq G$)

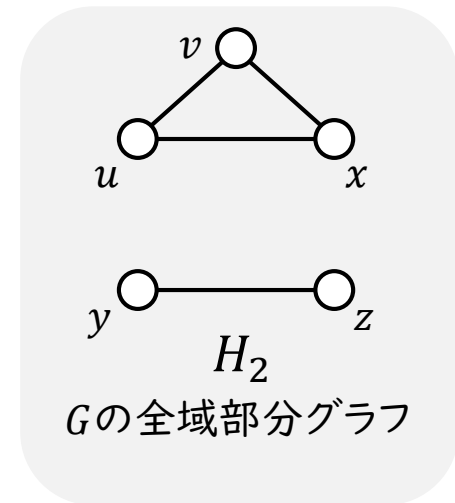
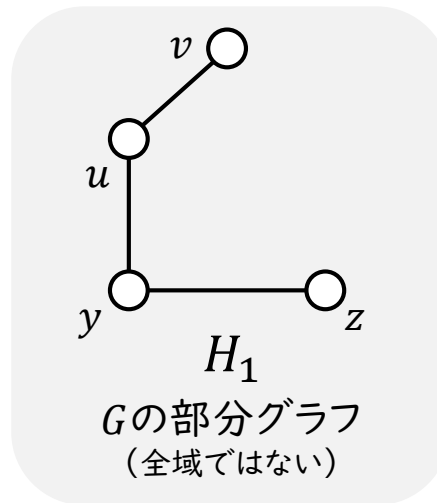
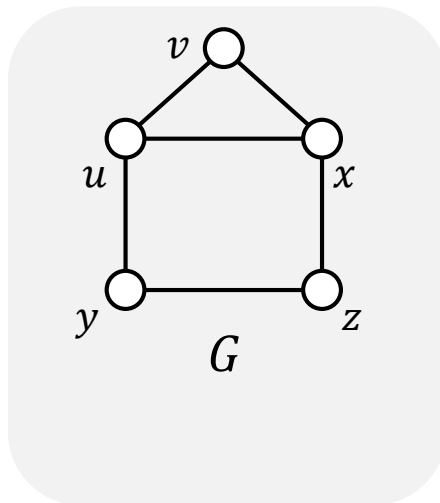
- グラフ $H = (V', E')$, グラフ $G = (V, E)$, $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$
- グラフの点/辺集合の部分集合を点/辺集合とするグラフ

➤ 任意の $V'' \subseteq V$, $E'' \subseteq E$ に対して

- (V'', E'') は G の部分グラフとは限らない $\because$ グラフ $G = (V, E) \Leftrightarrow E \subseteq V \times V$

✓ グラフ G の全域部分グラフ H

- $H \subseteq G$, $V(H) = V(G)$
- 点集合が一致する部分グラフ



基本的な定義 (4) 路(パス) (path)

■ ウォーク (walk)

- 点辺系列 $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$: 長さ n (辺の数)
- 辺をたどって動き回る : $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ ($1 \leq i \leq n$)
- 部分グラフ (もしくは性質を満たすグラフ)

✓ 単純グラフ

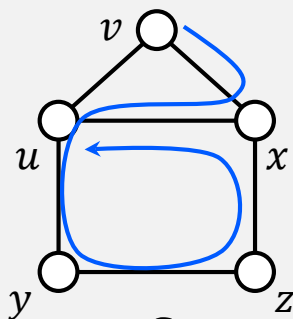
⇒ 点系列 $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ で指定可 : $(v_{i-1}, v_i) \in E(G)$ ($1 \leq i \leq n$)

■ トレイル (trail)

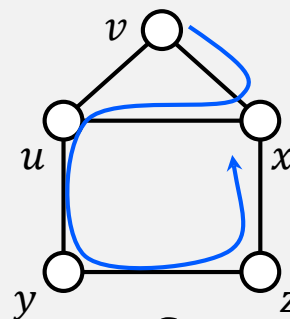
- 同じ辺を通らないウォーク

■ 路 (パス) (path)

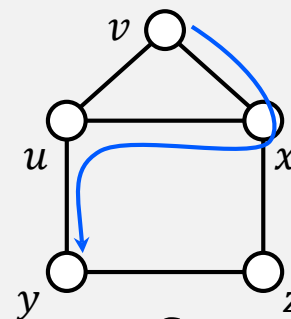
- 同じ点を通らないウォーク



G
長さ6の (v, u) ウォーク
 (v, x, u, y, z, x, u)



G
長さ5の (v, x) トレイル
 (v, x, u, y, z, x)



G
長さ3の (v, y) 路
 (v, x, u, y)

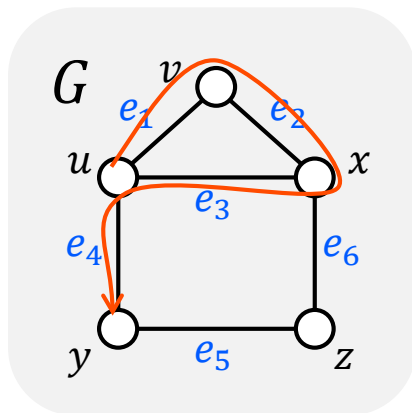
トレイル (Trail)

■ 同じ辺を通らないウォーク

- $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$
 - ただし $e_i \neq e_j$ ($i \neq j$), $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ ($1 \leq i \leq k$)
- 長さ k (辺数)

■ (v_0, v_k) -トレイル

- v_0 から v_k へのトレイル



$P = (u, e_1, v, e_2, x, e_3, u, e_4, y)$
 $P = (u, v, x, u, y)$
 is a (u, y) -trail of length 4 in G

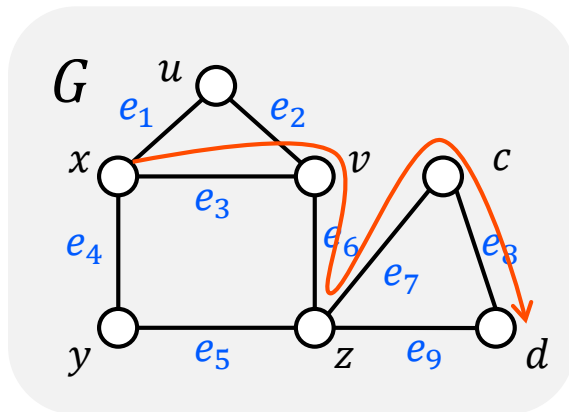
路(パス) (Path)

■ 同じ点を通らないウォーク

- $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$
 - ただし $v_i \neq v_j$ ($i \neq j$), $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ ($1 \leq i \leq k$)
- 長さ k (辺数)

■ (v_0, v_k) -路

- v_0 から v_k への路



$$P = (x, e_3, v, e_6, z, e_7, c, e_8, d)$$

$$P = (x, v, z, c, d)$$

is a (x, d) -path of length 4 in G

路(パス)の性質 (a)

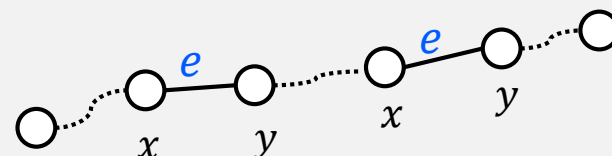
■ 定理 (a)

- 路はトレイル

□ 証明:

- トレイルでない路が存在すると仮定
- 同じ辺を2回以上含む
⇒ 同じ点を2回以上含む ⇒ 仮定に反する ■
- 同じ辺を通る ⇒ 同じ端点を通る
- **トレイルは路とは限らない**

ある路がトレイルでないならば...



■ ウォーク (walk)

- 点辺系列 $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$: 長さ n (辺の数)
- 辺をたどって動き回る : $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ ($1 \leq i \leq n$)
- 部分グラフ (もしくは性質を満たすグラフ)
- ✓ 単純グラフ
⇒ 点系列 $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ で指定可 : $(v_{i-1}, v_i) \in E(G)$ ($1 \leq i \leq n$)

■ トレイル (trail)

- 同じ辺を通らないウォーク

■ 路 (パス) (path)

- 同じ点を通らないウォーク

路(パス)の性質 (b)

■ 定理 (b) (Theorem 1.1)

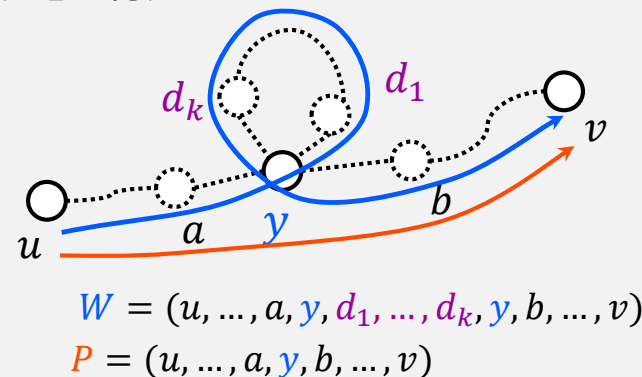
- 長さ n の (u, v) ウォークが存在
 $\Rightarrow$ 長さ n 以下の (u, v) 路が存在

□ 証明:

- 同じ点間の区間を取り除く
- 繰り返す
 $\Rightarrow$ 同じ点が現れないウォーク=路 ■

➤ ウォークの中に路あり

点が2回現れたらショートカットできる



■ ウォーク (walk)

- 点辺系列 $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$: 長さ n (辺の数)
- 辺をたどって動き回る : $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ ($1 \leq i \leq n$)
- 部分グラフ (もしくは性質を満たすグラフ)
- ✓ 単純グラフ
 $\Rightarrow$ 点系列 $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ で指定可 : $(v_{i-1}, v_i) \in E(G)$ ($1 \leq i \leq n$)

■ トレイル (trail)

- 同じ辺を通らないウォーク

■ 路 (パス) (path)

- 同じ点を通らないウォーク

路(パス)の性質 (c)

■ 定理 (c)

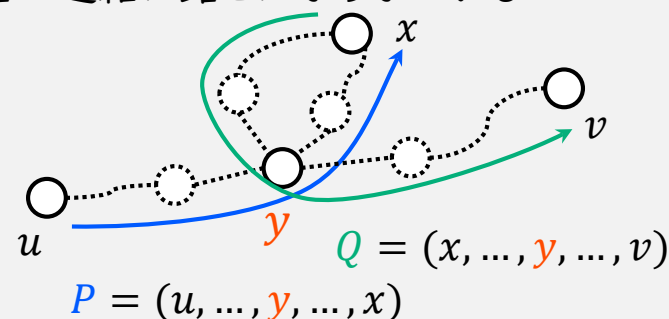
- (u, x) 路 P と (x, v) 路 Q が存在
 $\Rightarrow (u, v)$ 路は存在

□ 証明:

- P と Q の連結は (u, v) ウォーク
- (u, v) ウォークが存在
 $\Rightarrow (u, v)$ 路は存在 ■

➤ 路の連結は路になるとは限らない

路の連結は路とはならないかも



■ ウォーク (walk)

- 点辺系列 $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$: 長さ n (辺の数)
- 辺をたどって動き回る : $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ ($1 \leq i \leq n$)
- 部分グラフ (もしくは性質を満たすグラフ)
- ✓ 単純グラフ
 $\Rightarrow$ 点系列 $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ で指定可 : $(v_{i-1}, v_i) \in E(G)$ ($1 \leq i \leq n$)

■ トレイル (trail)

- 同じ辺を通らないウォーク

■ 路 (パス) (path)

- 同じ点を通らないウォーク

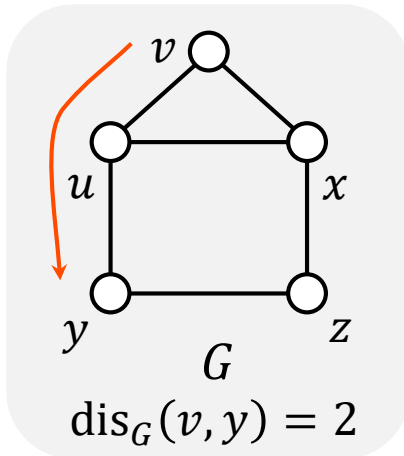
基本的な定義 (5) 最短路と距離

■ 2点 uv 間の距離

- 最短路の長さ(重み)
- uv 間に路がない $\Leftrightarrow$ 距離 ∞

□ グラフ G

- 距離 $\text{dis}_G(u, v)$
 - 最短 (u, v) 路 P の長さ
 - 長さ: 辺数 $|P|$
- ✓ 距離公理を満たす

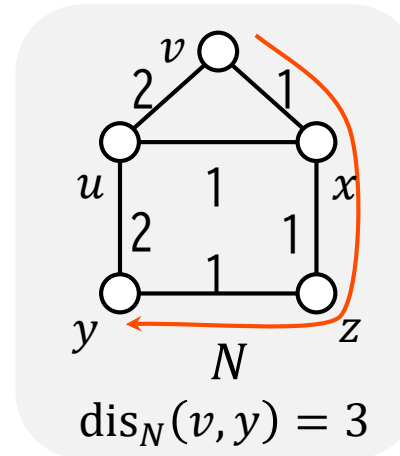


◆ 距離公理

- 非負 : $d(p, q) \geq 0$
- 非退化 : $p = q \Leftrightarrow d(p, q) = 0$
- 対称 : $d(p, q) = d(q, p)$
- 三角不等式 : $d(p, r) + d(r, q) \geq d(p, q)$

□ ネットワーク $N = (G, w)$

- 距離 $\text{dis}_N(u, v)$
 - 最短 (u, v) 路 P の重み
 - 重み: 辺重み総和 $w(P) = \sum_{e \in P} w(e)$
- ✓ $w(e) > 0 \Rightarrow$ 距離公理を満たす

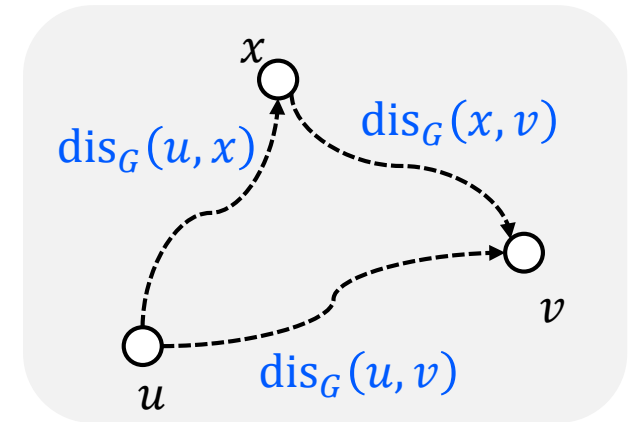


距離の性質

- $\text{dis}_G(u, v)$ satisfies the following axioms of distance function:

➤ For any $u, v, w \in V(G)$

- $\text{dis}_G(u, v) \geq 0$ (non-negativity)
- $\text{dis}_G(u, v) = 0 \iff u = v$ (identity of indiscernibles)
- $\text{dis}_G(u, v) = \text{dis}_G(v, u)$ (symmetry)
- $\text{dis}_G(u, v) \leq \text{dis}_G(u, x) + \text{dis}_G(x, v)$ (triangle inequality)

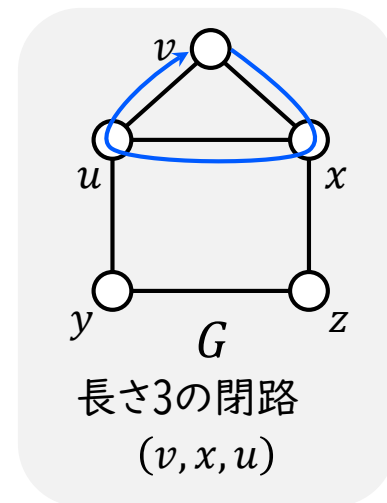
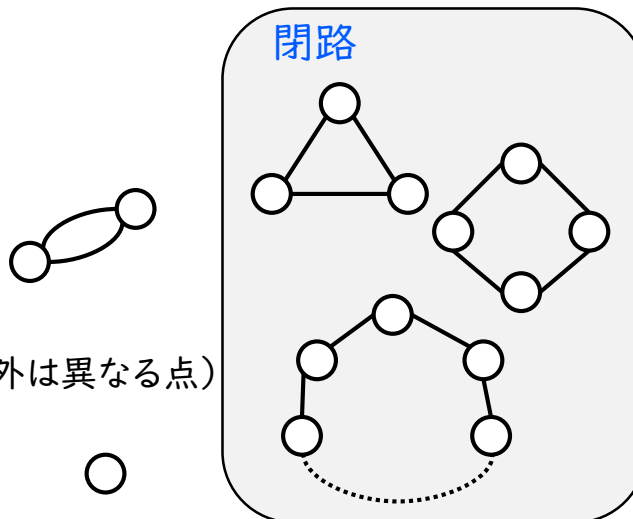


基本的な定義 (6) 閉路(サイクル) (cycle)

- **閉ウォーク** (closed walk)
 - 始点終点が同一のウォーク
 - **閉トレイル** (closed trail)
 - 始点終点が同一のトレイル
 - **閉路 (サイクル)** (cycle)
 - 始点終点が同一の路 (始点終点以外は異なる点)
- ✓ 長さは3以上

➤ 1点のみ(辺なし)の点辺系列

- ⇒ 長さ0のウォーク、閉ウォーク、トレイル、閉トレイル、路
- ⇒ **閉路ではない(と定義)**

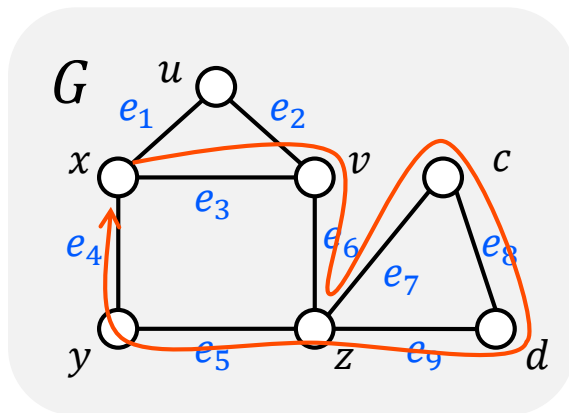


- **ウォーク** (walk)
 - 点辺系列 $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$: 長さ n (辺の数)
 - 辺をたどって動き回る : $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ ($1 \leq i \leq n$)
 - 部分グラフ (もしくは性質を満たすグラフ)
- ✓ 単純グラフ
 - ⇒ 点系列 $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ で指定可 : $(v_{i-1}, v_i) \in E(G)$ ($1 \leq i \leq n$)
- **トレイル** (trail)
 - 同じ辺を通らないウォーク
- **路 (パス)** (path)
 - 同じ点を通らないウォーク

閉トレイル (Closed Trail)

■ 同じ辺を通らない始点と終点が一致するウォーク

- $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$
 - ただし $v_0 = v_k, e_i \neq e_j \ (i \neq j), \ e_i = (v_{i-1}, v_i) \ (1 \leq i \leq k)$
- 長さ k (辺数)



$$P = (x, e_3, v, e_6, z, e_7, c, e_8, d, e_9, z, e_5, y, e_4, x)$$

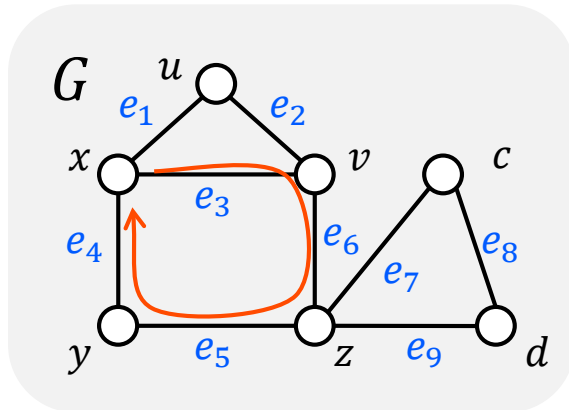
$$P = (x, v, z, c, d, z, y, x)$$

is a closed trail of length 7 in G

閉路 (Cycle)

■ 同じ点を通らない始点と終点が一致するウォーク

- $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$
 - ただし $v_0 = v_k, v_i \neq v_j$ ($0 \leq i < j < k$), $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ ($1 \leq i \leq k$)
- 長さ k (辺数)

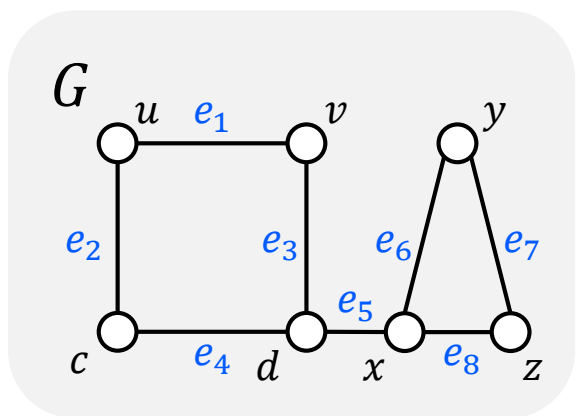


$P = (x, e_3, v, e_6, z, e_5, y, e_4, x)$
 $P = (x, v, z, y, x)$
 is a cycle of length 4 in G

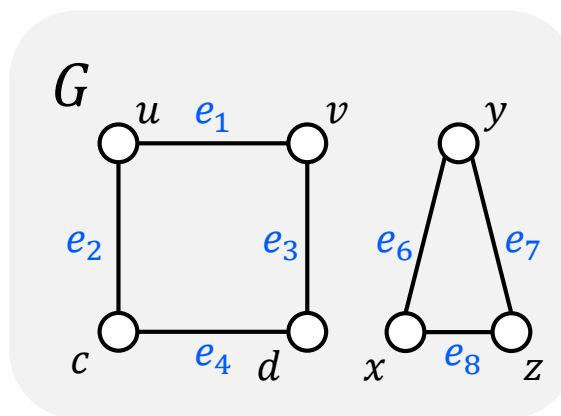
基本的な定義 (7) 連結 (connected)

■ 連結グラフ

- 任意の2点間に路があるグラフ
- 任意の2点が連結であるグラフ



connected



not connected

連結成分

■ G の連結成分

- G の極大な連結である部分グラフ

■ 連結成分が一つのグラフ

- ✓ 連結グラフ

➤ 点間の連結関係 $u \sim v$

- 2点 uv は連結 $\Leftrightarrow$ 2点 uv 間に路が存在する

■ 連結関係 $\sim$ ($\subseteq V(G) \times V(G)$)

- 同値関係

- 反射律 : $v \sim v$ ($\forall v \in V(G)$)

- 対称律 : $u \sim v \Leftrightarrow v \sim u$ ($\forall u, v \in V(G)$)

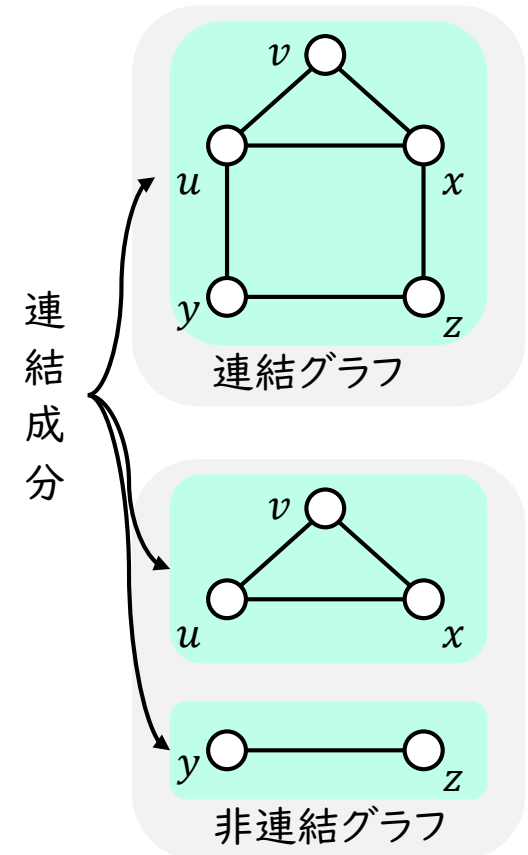
- 推移律 : $u \sim w, w \sim v \Rightarrow u \sim v$ ($\forall u, v, w \in V(G)$)

- 連結関係に関する同値類 $V_{\sim}(v) = \{u \in G \mid v \sim u\}$

■ 点集合の分割

- $V_{\sim}(u) = V_{\sim}(v)$ または $V_{\sim}(u) \cap V_{\sim}(v) = \emptyset$ ($\forall u, v \in V(G)$)

■ 連結成分の点集合



関係 (確認)

■ 集合 A (定義域) から集合 B (値域) への関係 R

- $a \in A$ と $b \in B$ が関係 R にある

■ $R(a, b)$

■ aRb

➤ $R: A \rightarrow B$

➤ $R \subseteq A \times B$

例: $A = \{1, 2, 3\}$ 上の「より小さい関係 $<$ 」

- $1 < 2, 1 < 3, 2 < 3$

- $< = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

■ $1 \nless 1, 2 \nless 1, 2 \nless 2, \dots, 3 \nless 3$

◆ 集合族上の関係: 同型

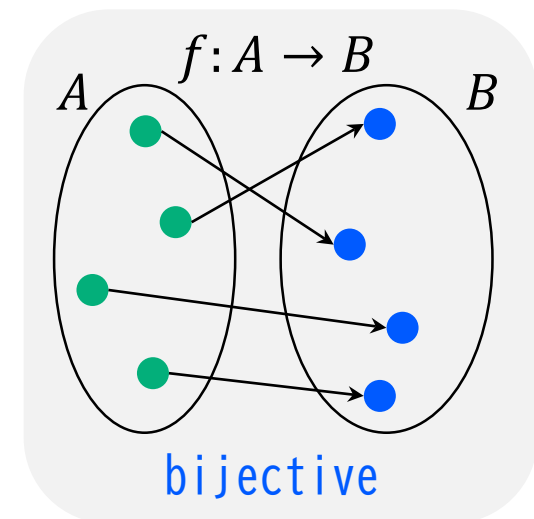
- 同型 ($\cong$): 全単射が存在する

- $A \cong B \implies |A| = |B|$

■ 同型ならば濃度が等しい

- 集合の濃度: 同型 $\cong$ による同値類

■ $|A| = [A]_{\cong} = \{B \mid A \cong B\}$



関係 (確認)

■ 同値関係 ($\equiv$)

- 反射律 : $\forall a \in S (a \equiv a)$
- 対称律 : $\forall a, b \in S (a \equiv b \Rightarrow b \equiv a)$
- 推移律 : $\forall a, b, c \in S (a \equiv b, b \equiv c \Rightarrow a \equiv c)$

➤ 同値類 $[a]_{\equiv} = \{b \mid a \equiv b\}$

■ 半順序関係 ($\leq$)

- 反射律 : $\forall a \in S (a \leq a)$
- 反対称律: $\forall a, b \in S (a \leq b, b \leq a \Rightarrow a \equiv b)$
- 推移律 : $\forall a, b, c \in S (a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c)$

1-1 (3) グラフの行列表現

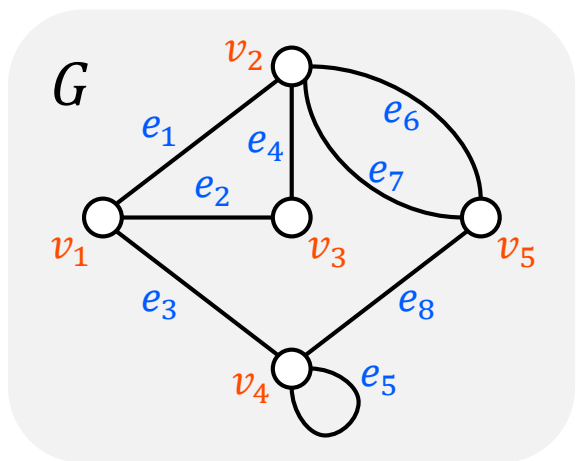
隣接行列 (adjacency matrix)

■ $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$

■ G の隣接行列

- $n \times n$ 行列 $A(G) = [a_{ij}]$

- a_{ij} : v_i と v_j をつなぐ辺の数

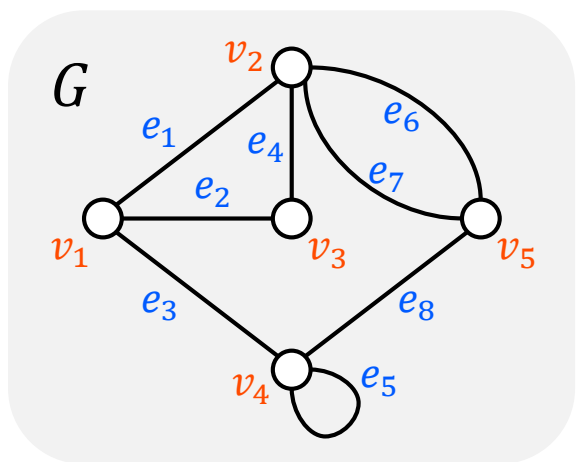


$$\begin{array}{c}
 v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \\
 \begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4 \\
 v_5
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
 0 & 2 & 0 & 1 & 0
 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Adjacency Matrix $A(G)$

隣接行列の性質

- 各行の和 (row sum)
- 各列の和 (column sum)
 - 対応する点の次数
- 対称行列 (無向グラフ)



$$\begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Adjacency Matrix $A(G)$

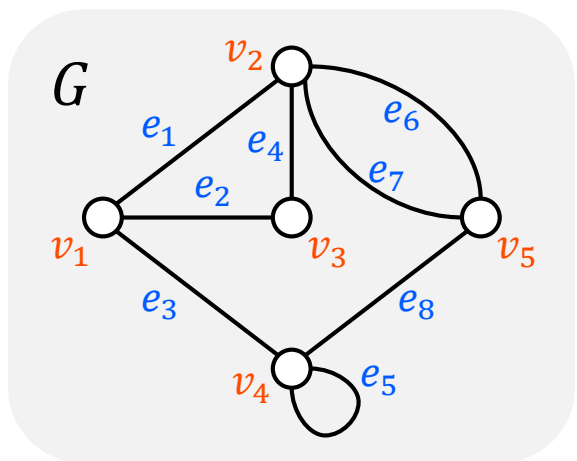
接続行列 (incidence matrix)

■ $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$

■ G の接続行列

- $n \times m$ 行列 $B(G) = [b_{ij}]$

■ b_{ij} : v_i に接続する e_j の数



$$\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

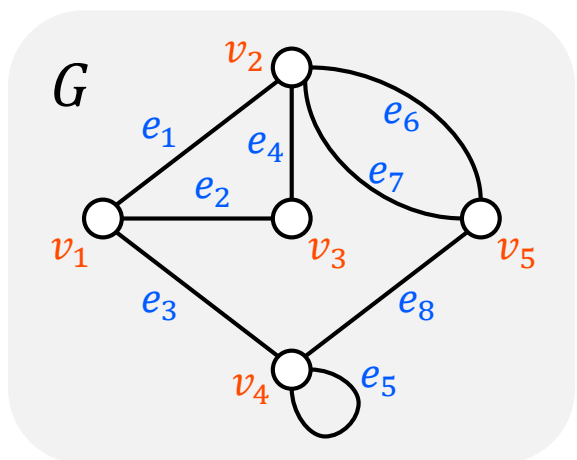
Incidence Matrix $B(G)$

接続行列の性質

■ 定理 (Theorem 1.2)

- 各行の和 (row sum)

■ 対応する点の次数



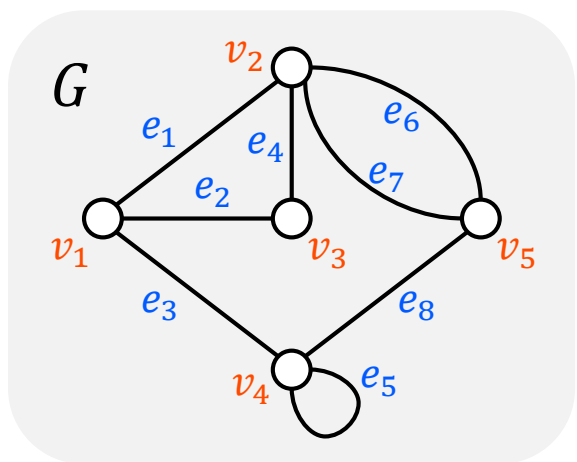
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	row sum
v_1	1	1	1	0	0	0	0	0	3
v_2	1	0	0	1	0	1	1	0	4
v_3	0	1	0	1	0	0	0	0	2
v_4	0	0	1	0	2	0	0	1	4
v_5	0	0	0	0	0	1	1	1	3

Incidence Matrix $B(G)$

接続行列の性質

■ 定理 (Theorem 1.2)

- 各列の和 (column sum) = 2



$$\begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4 \\
 v_5
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \quad e_6 \quad e_7 \quad e_8 \\
 \left(\begin{array}{cccccccc}
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Incidence Matrix $B(G)$

1-1 (4) 次数と辺数

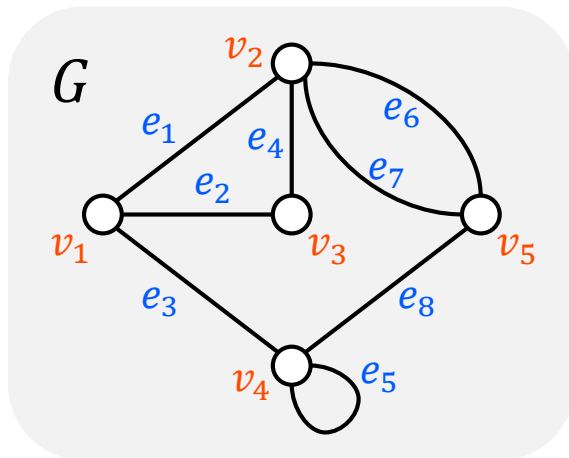
■ 定理 (Theorem 1.3)

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2|E(G)|$$

□ 証明(Proof):

- $\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij}$ (= sum of all entries in $B(G)$)
- $2|E(G)| = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_{ij}$ (= sum of all entries in $B(G)$)

$$\therefore \sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2|E(G)| \quad \blacksquare$$



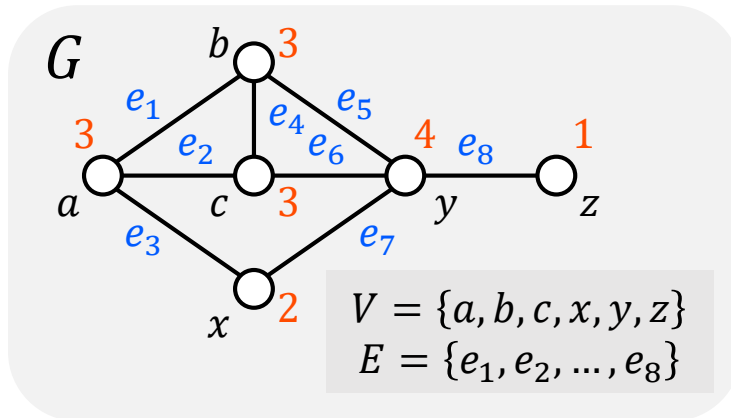
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	row sum
v_1	1	1	1	0	0	0	0	0	3
v_2	1	0	0	1	0	1	1	0	4
v_3	0	1	0	1	0	0	0	0	2
v_4	0	0	1	0	2	0	0	1	4
v_5	0	0	0	0	0	1	1	1	3

Incidence Matrix $B(G)$

次数と辺数

■ 定理 (Theorem 1.3)

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2|E(G)|$$



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	次数
a	1	1	1	0	0	0	0	0	3
b	1	0	0	1	1	0	0	0	3
c	0	1	0	1	0	1	0	0	3
x	0	0	1	0	0	0	1	0	2
y	0	0	0	0	1	1	1	1	4
z	0	0	0	0	0	0	0	1	1

■ 系

- 次数の総和は偶数

接続行列の要素の二重数え上げ
 行方向: 点次数
 列方向: 2 列数 = 辺数

奇点の数

■ 系

- 奇点(次数が奇数の点)は偶数個

□ 証明:

- $(V_{\text{odd}}, V_{\text{even}})$: $V(G)$ の分割

- V_{odd} : 奇点の集合

- V_{even} : 偶点の集合

- ✓ $V_{\text{odd}} \cup V_{\text{even}} = V(G)$

- ✓ $V_{\text{odd}} \cap V_{\text{even}} = \emptyset$

- $\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2|E(G)|$

- $\sum_{v \in V_{\text{odd}}} \deg_G(v) + \sum_{v \in V_{\text{even}}} \deg_G(v) = 2|E(G)|$

- 偶点の次数総和は偶 $\Rightarrow$ 奇点の次数総和も偶

$$\therefore |V_{\text{odd}}| = \text{even} \blacksquare$$

