Tokyo Tech

離散構造とアルゴリズム (2-1) 関数の漸近的評価

高橋篤司

東京工業大学 工学院 情報通信系

2-1 関数の漸近的評価

- 問題 $\Pi = (I, Q(x))$
  - 入力Iと質問$Q(x)$の組
- アルゴリズム
  - 問題を解くための手順
    - 入力に応じて手順は一意に定まる

  - 解析
    - 正当性
    - 効率：時間, 領域

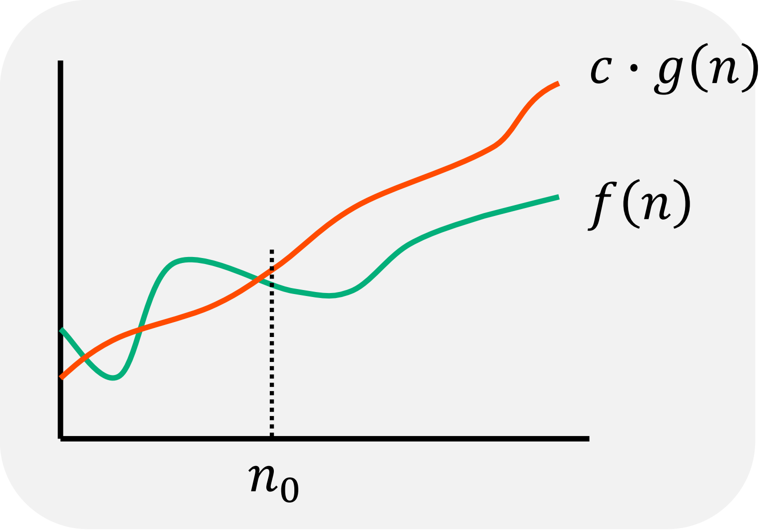
入力の大きさと基本操作の数の関係

➢ 漸近的に評価

関数の漸近的評価(1) O(.)

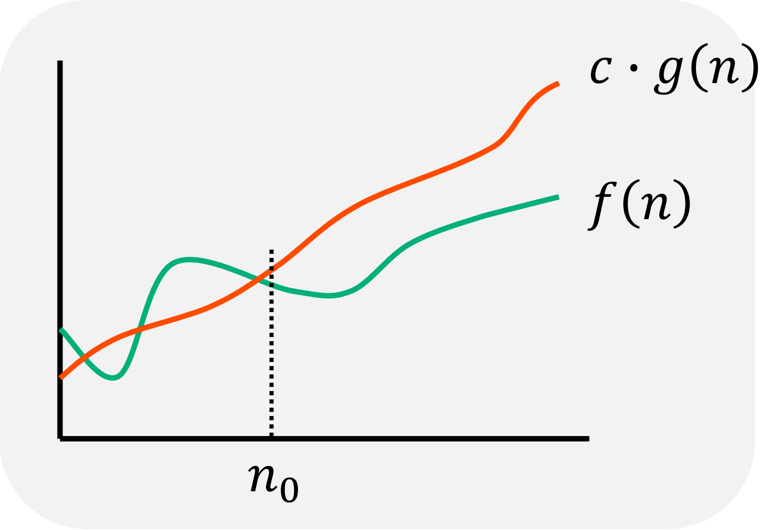
- 漸近的に上から抑える
- $f(n) = O\bigl(g(n)\bigr)$
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \le c \Longrightarrow f(n) = O\bigl(g(n)\bigr)$ c：非負定数
    - $\exists c\ (c \ge 0) \exists n_0 \forall n\ (n \ge n_0)\ f(n) \le c \cdot g(n)$
- $f(n)$は$g(n)$より，漸近的に等しいか小さい($\le$)

✓ $f(n)$は$g(n)$のオーダー



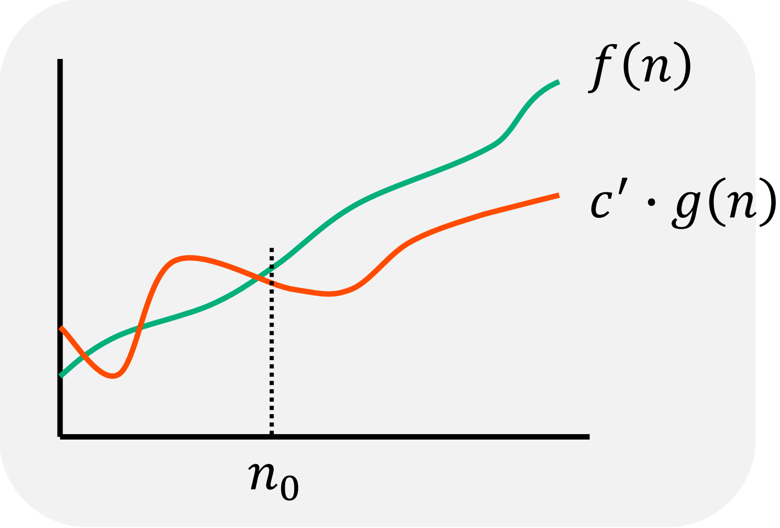
関数の漸近的評価(2) $o(.)$

- 漸近的に上から抑える
- $f(n) = o\big(g(n)\big)$
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Longrightarrow f(n) = o\big(g(n)\big)$
    - $f(n) = o\big(g(n)\big) \Longrightarrow f(n) = O\big(g(n)\big)$
- $f(n)$は$g(n)$より，漸近的に（真に）小さい(<)



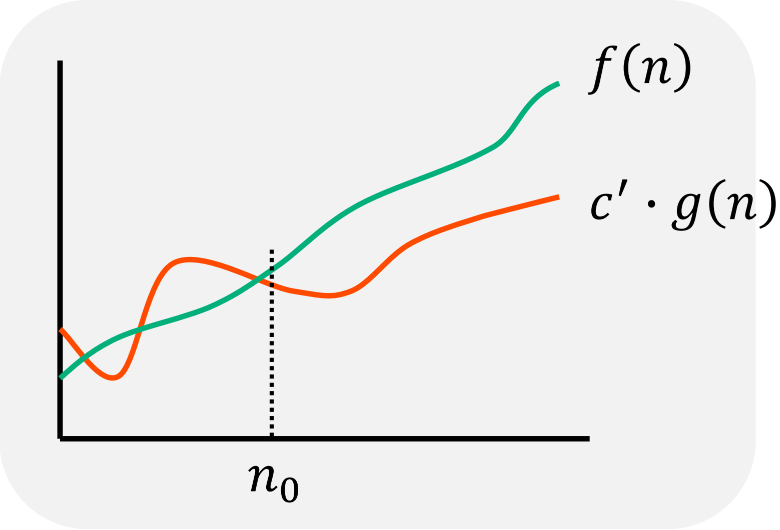
関数の漸近的評価(3) $\Omega(.)$

- 漸近的に下から抑える
- $f(n) = \Omega(g(n))$
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \geq c' \Longrightarrow f(n) = \Omega(g(n))$　　c'：正定数
    - $\exists c'(c' > 0)\exists n_0 \forall n\ (n \geq n_0)\ f(n) \geq c' \cdot g(n)$
- $f(n)$は$g(n)$より, 漸近的に等しいか大きい($\geq$)



関数の漸近的評価(4) $\omega(.)$

- 漸近的に下から抑える
- $f(n) = \omega(g(n))$
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Longrightarrow f(n) = \omega(g(n))$
    - ✓ $f(n) = \omega(g(n)) \Longrightarrow f(n) = \Omega(g(n))$
- $f(n)$は$g(n)$より, 漸近的に(真に)大きい(>)

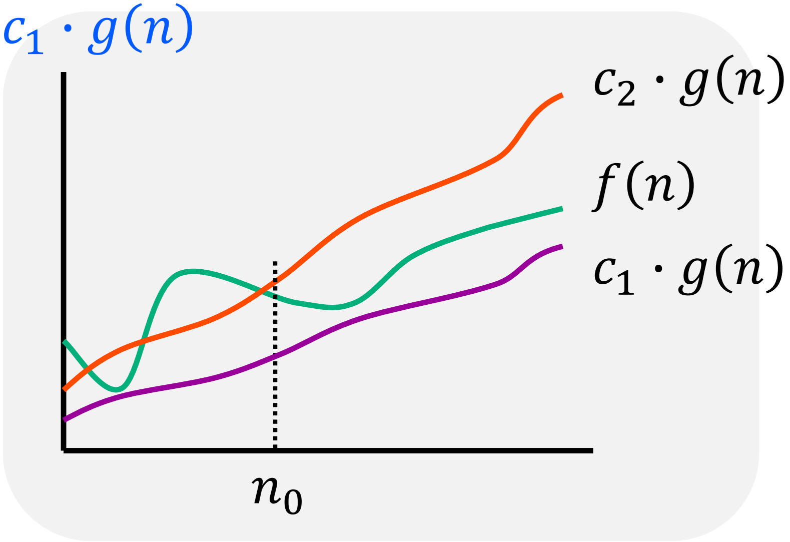


関数の漸近的評価(5) $\Theta(.)$

- 漸近的に等しい(=)
- $f(n) = \Theta(g(n))$
  - $f(n) = O(g(n))$かつ$f(n) = \Omega(g(n))$
  - $c_1 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_2$

c_1, c_2：正定数

- $\exists c_2 (c_2 \geq 0) \exists c_1 (c_1 > 0) \exists n_0 \forall n \ (n \geq n_0)$
  $c_2 \cdot g(n) \geq f(n) \geq c_1 \cdot g(n)$



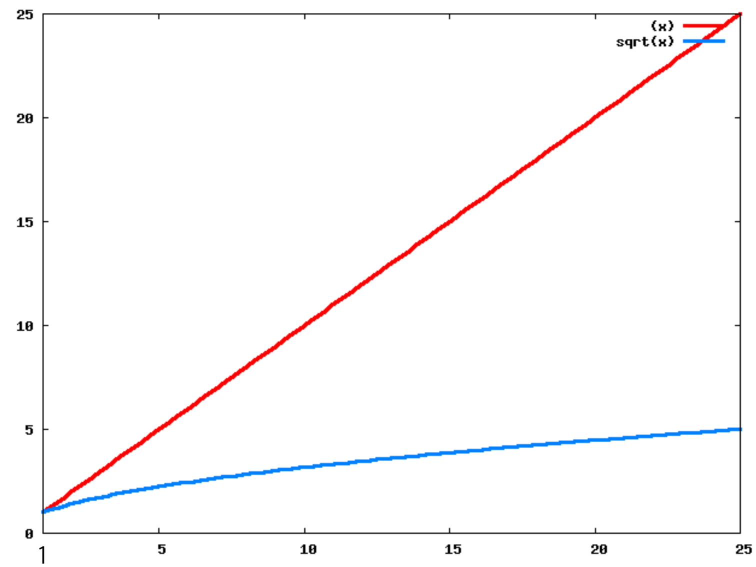
関数の漸近的評価（例1）

- Example

1. $\sqrt{n} = \mathrm{O}(n)$ ： ?
2. $\sqrt{n} = \mathrm{o}(n)$ ： ?
3. $\sqrt{n} = \Omega(n)$ ： ?
4. $\sqrt{n} = \omega(n)$ ： ?

関数の漸近的評価（例1）

- Example
  1. $\sqrt{n} = \mathrm{O}(n)$ ： Yes
  2. $\sqrt{n} = \mathrm{o}(n)$ ： Yes
  3. $\sqrt{n} = \Omega(n)$ ： No
  4. $\sqrt{n} = \omega(n)$ ： No



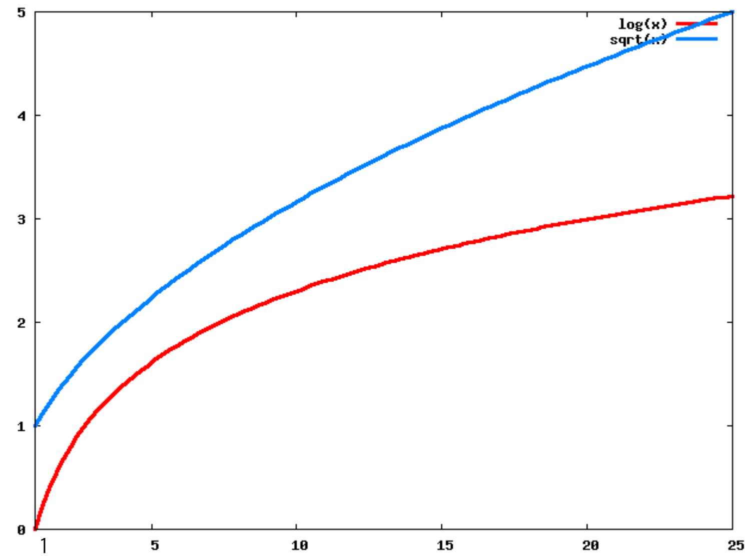
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

関数の漸近的評価（例2）

- Example
  1. $\log_e n = \mathrm{O}(\sqrt{n})$ ：？
  2. $\log_e n = \mathrm{o}(\sqrt{n})$ ：？
  3. $\log_e n = \Omega(\sqrt{n})$ ：？
  4. $\log_e n = \omega(\sqrt{n})$ ：？

関数の漸近的評価(例2)

- Example
  1. $\log_e n = O(\sqrt{n})$: Yes
  2. $\log_e n = o(\sqrt{n})$: Yes
  3. $\log_e n = \Omega(\sqrt{n})$: No
  4. $\log_e n = \omega(\sqrt{n})$: No



$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_e n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\log_e n)'}{(\sqrt{n})'} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$$

L'Hospital's Theorem

関数の漸近的評価（例3）

- Example
  - $100n \neq \omega(n^2)$, $100n \neq \Omega(n^2)$
    - $100n$はn^2より漸近的に真に大きくはない
    - $100n$は漸近的にn^2以上ではない
  - $100n^2 \neq \omega(n^2)$, $100n^2 = \Omega(n^2)$
    - $100n^2$はn^2より漸近的に真に大きくはない
    - $100n^2 > n^2$
      であり, $100n^2$は漸近的にn^2以上
  - $0.01n^3 = \omega(n^2)$, $0.01n^3 = \Omega(n^2)$
    - $n \leq 100$ならば$0.01n^3 \leq n^2$であるが
      $0.01n^3$はn^2より漸近的に真に大きい
    - $0.01n^3$は漸近的にn^2以上

関数の漸近的評価(6) 漸近的評価

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$
  - 0に収束
    - $f(n) = o\big(g(n)\big)$
      - $f(n)$は$g(n)$より真に小さい(漸近的に)
  - 無限大に発散
    - $f(n) = \omega\big(g(n)\big)$
      - $f(n)$は$g(n)$より真に大きい(漸近的に)
  - 正定数で上下から抑えられる(収束する必要はない)
    - $f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$
      - $f(n)$は$g(n)$と等しい(漸近的に)

関数の漸近的評価(7) オーダー

- 定数オーダー　$O(1)$
- 線形オーダー　$O(n)$
- 多項式オーダー　$O(n^k)$　($k(\geq 0)$は定数)
- 指数オーダー　$O(k^n)$　($k(> 1)$は定数)

➢ $\log n$ のオーダーは？

- $\log n = o(n)$
- $\log n = o(n^{0.1})$
- $\log n = \omega(1)$
- $\log n = O(n^{\varepsilon})$　($\varepsilon > 0$)

関数の漸近的評価：多項式

- 定理： If $a_0 > 0$

$$a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k = \Theta(n^k)$$

- 証明：

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k}{n^k} = a_0$$

✓ $a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k = O(n^k)$

✓ $a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k = \Omega(n^k)$

✓ $a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k = \Theta(n^k)$ ■

関数の漸近的評価：階乗と対数

■ 定理 (Theorem 2.1)

$$\log_2(n!) = \Theta(n \log n)$$

□ 証明：

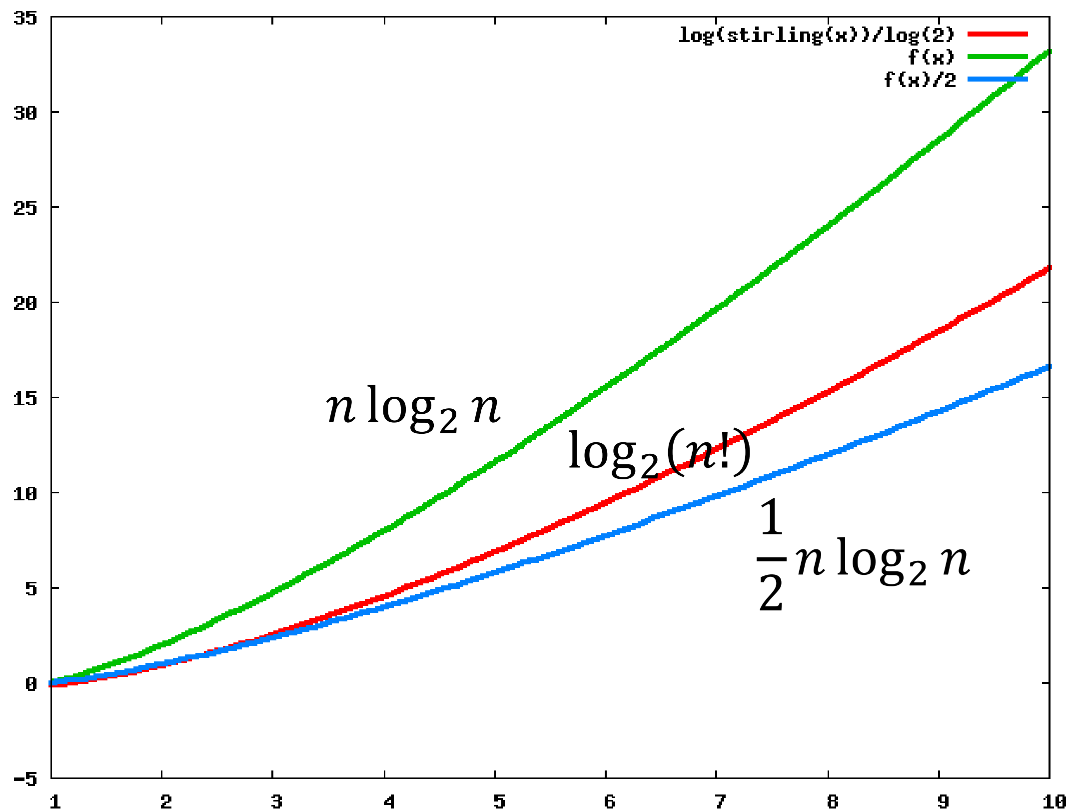
- $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \leq n^n$
  - ■ $\log_2(n!) \leq \log_2 n^n = n\log_2 n$
  - ■ $\frac{\log_2(n!)}{n \log_2 n} \leq 1$
  - ✓ $\log_2(n!) = O(n \log n)$
- $n! \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$
  - ■ $\log_2(n!) \geq \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} = \frac{1}{2} n \log_2 n - \frac{n}{2}$
  - ■ $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(n!)}{n \log_2 n} \geq \frac{1}{2}$
  - ✓ $\log_2(n!) = \Omega(n \log n)$

$$\therefore \log_2(n!) = \Theta(n \log n) \quad \blacksquare$$

関数の漸近的評価：階乗と対数

■ 定理 (Theorem 2.1)

$$\log_2(n!) = \Theta(n \log_2 n)$$



関数の漸近的評価：対数

- 定理： If $a > 0$ and $b > 0$

$$\log_a n = \Theta(\log_b n)$$

- 証明：
  - $\dfrac{\log_a n}{\log_b n} = \log_a n \dfrac{\log_a b}{\log_a n} = \log_a b$
    - $\log_a n = O(\log_b n)$
    - $\log_a n = \Omega(\log_b n)$

$$\therefore \log_a n = \Theta(\log_b n) \quad \blacksquare$$

オーダー表記における注意

- $f(n) = n$の場合
  - $f(n)$のオーダーは$O(n)$である
    - これを便宜上, $f(n) = O(n)$と表記している
  - $f(n)$のオーダーは$O(n^2)$である
    - この表現は正しいが, 最も適切な表現とは言えない.

➢ $O(n) = f(n)$とは書かない

➢ $f(n) = O(n^2)$, $f(n) = O(n)$であるので$O(n^2) = O(n)$である, と結論してはいけない