



Tokyo Tech

離散構造とアルゴリズム (4-4) 近似アルゴリズム

高橋篤司

東京工業大学 工学院 情報通信系

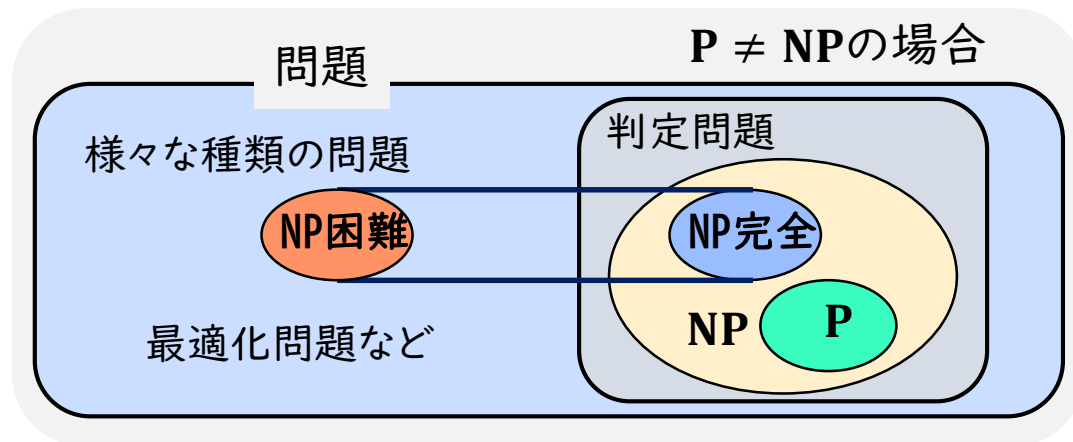
4-4 (1) NP困難

■ 最適化問題

- NP問題ではない $\Rightarrow$ NP完全問題ではない

■ NP困難(NP-hard)

- NP完全問題に付随する問題
- $P \neq NP$ ならば
 - 多項式時間アルゴリズムは存在しない
- 近似アルゴリズムや発見的手法を用いる



NP困難問題(NP-hard Problem)

■ 3彩色問題

- 3彩色可能なら、グラフの3彩色を一つ示せ

■ ハミルトン閉路問題

- ハミルトングラフなら、ハミルトン閉路を一つ示せ

■ 巡回セールスマン問題

- 重み最小のハミルトン閉路を一つ示せ

■ 三角巡回セールスマン問題

- 三角不等式を満たす重みに対して、重み最小のハミルトン閉路を一つ示せ

■ 最大巡回セールスマン問題

- 重み最大のハミルトン閉路を一つ示せ

■ 最大独立点集合問題

- 点数最大の独立点集合を一つ示せ

■ ...

4-4 (2) 近似アルゴリズム

■ 最適化問題 $\Pi = (I, Q(x))$ に対するアルゴリズム A

- $s \in I$

■ $A(s)$: アルゴリズム出力の値

■ $OPT(s)$: 最適解の値

■ 近似比 r (approximation ratio)

- 最大化問題

$$\frac{OPT(s)}{A(s)} \leq r, \quad \forall s \in I$$

近似比 ≥ 1

近似比 = 1 $\Rightarrow$ 厳密アルゴリズム

- 最小化問題

$$\frac{A(s)}{OPT(s)} \leq r, \quad \forall s \in I$$

※ 近似比を逆数で定義することもある

■ 近似アルゴリズム

- 近似比が既知のアルゴリズム

4-4 (3) 三角巡回セールスマン問題

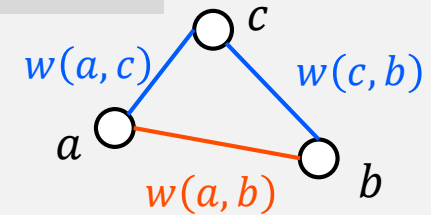
■ 入力

- K_n , $w : E(K_n) \rightarrow \mathbb{R}^+$
 - ✓ w は三角不等式を満たす

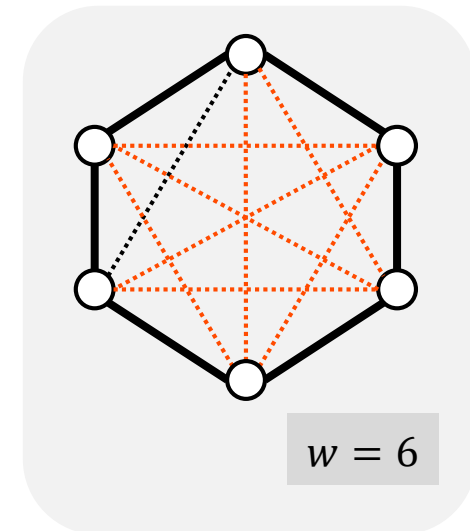
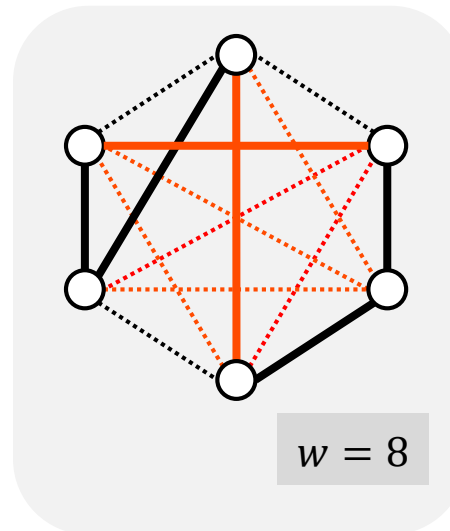
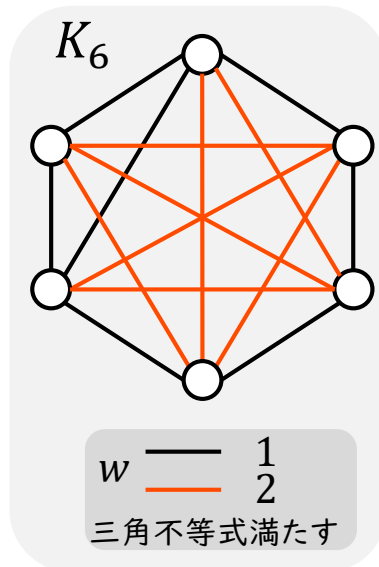
■ 質問

- (K_n, w) の最小ハミルトン閉路を一つ示せ

三角不等式



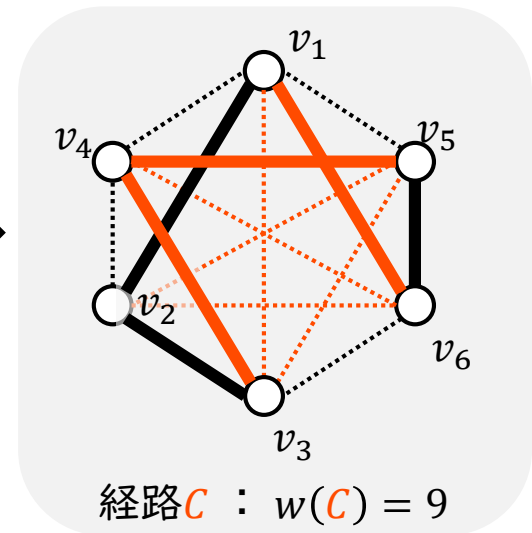
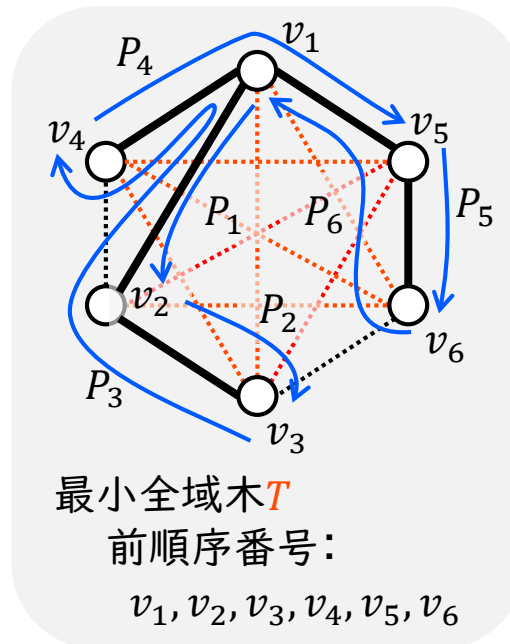
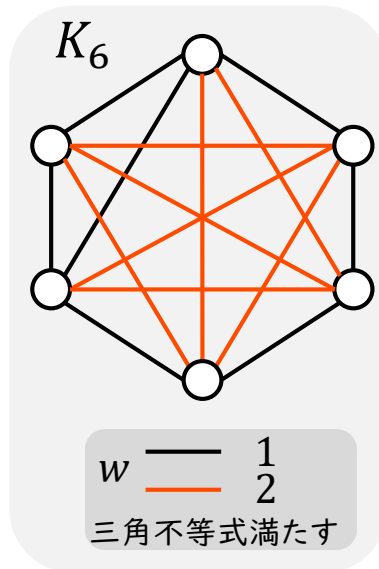
$$w(a, b) \leq w(a, c) + w(c, b)$$



三角巡回セールスマン問題

■ Algorithm 4.3 (TS)

- 入力: 完全グラフ K_n , 重み関数 $w: E(K_n) \rightarrow \mathbb{R}^+$ (三角不等式を満たす)
 - 出力: (K_n, w) のハミルトン閉路 C
1. (K_n, w) の最小全域木 T を求める $O(n^2 \log n)$ $|E(K_n)| = O(n^2)$
 2. T の前順序番号を求める $O(n)$ $|E(T)| = O(n)$
 3. 前順序の順に巡回する経路 C を出力 $O(n)$



三角巡回セールスマン問題

■ 定理 (Theorem 4.12) : 三角巡回セールスマン問題

- Algorithm 4.3 (TS) $O(n^2 \log n)$ 近似比高々2

□ 証明 : $P_i = (v_i, v_{i+1 \bmod n})$: T で v_i から $v_{i+1 \bmod n}$ への路

- $\sum_{i=1}^n w(P_i) = 2w(T)$

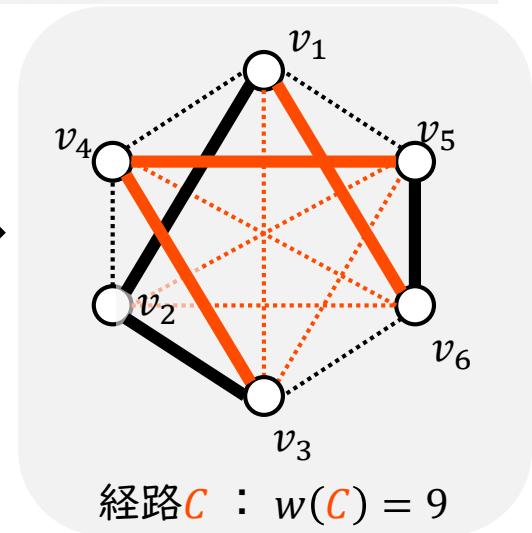
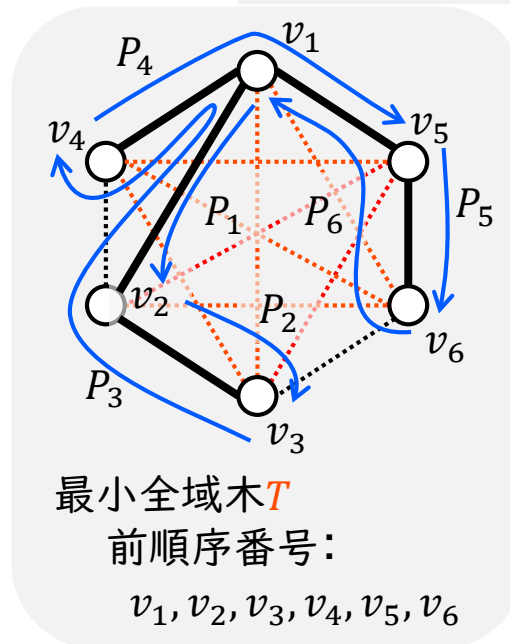
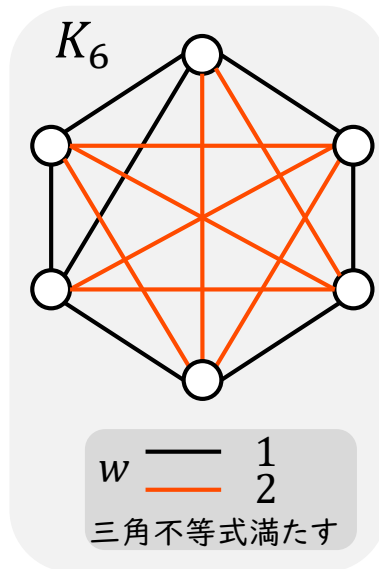
$w(v_i, v_{i+1 \bmod n}) \leq w(P_i) \quad \because$ 三角不等式

- $w(C) = \sum_{i=1}^n w(v_i, v_{i+1 \bmod n}) \leq \sum_{i=1}^n w(P_i) = 2w(T) \leq 2OPT$

✓ $\frac{w(C)}{OPT} \leq 2$

OPT : 最小全域木の重みより短くはない

1辺除くと木 $\therefore w(T) \leq OPT - w(e) \leq OPT$



巡回セールスマン問題の近似比

■ 定理：巡回セールスマン問題

- $P \neq NP \Rightarrow$ 近似比 $O(1)$ の近似アルゴリズムなし

□ 証明：近似比 k の近似アルゴリズムを仮定(背理法)

k : 定数

- HGから巡回セールスマン問題を構成

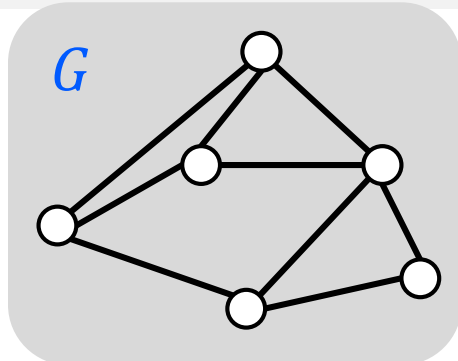
■ (K_n, w) の重み kn 以下の閉路： G の辺のみからなる重み n の閉路

■ アルゴリズムの出力

- G がハミルトングラフ $\Rightarrow$ 重み kn 以下の閉路(G のハミルトン閉路)を出力

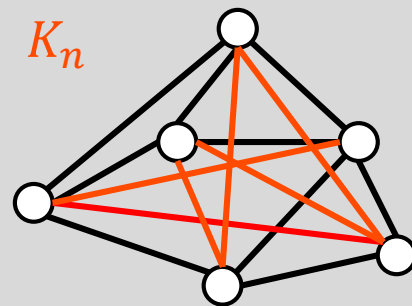
✓ G がハミルトングラフか多項式時間で判定可能 $\Rightarrow$ 矛盾

HG: ハミルトングラフ判定問題



$$n = |V(G)|$$

巡回セールスマン問題



w

— 1 ($e \in E(G)$)

— kn ($e \notin E(G)$)

$$r := n$$

ハミルトン閉路の重み $\begin{cases} n & G \text{ の辺のみ} \\ \geq kn + n - 1 & \text{その他の辺含む} \end{cases}$

G はハミルトングラフ $\Leftrightarrow (K_n, w)$ の最小ハミルトン閉路の重みは n

4-4 (4) 独立系と貪欲アルゴリズム

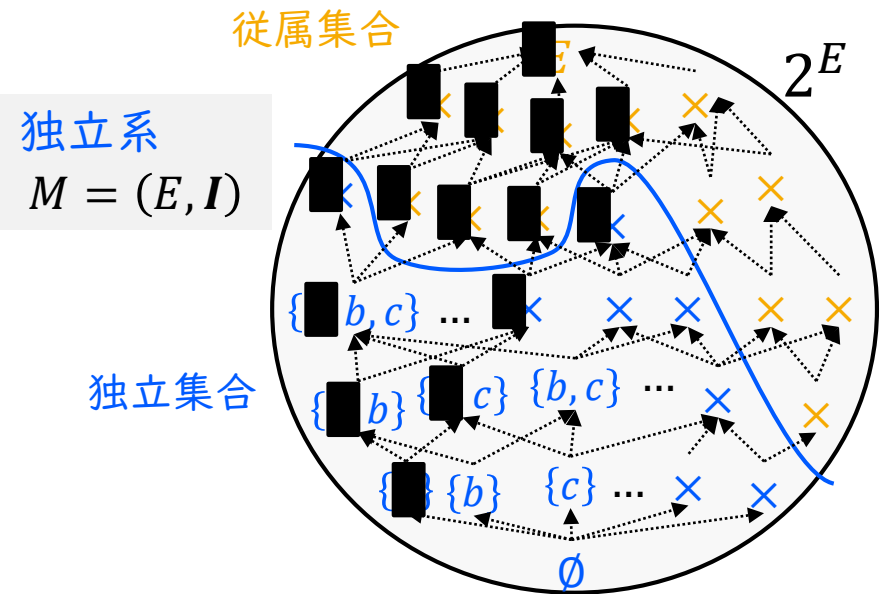
■ 独立系 $M = (E, I)$

1. $\emptyset \in I$
2. $\forall X \in I, Y \subseteq X \Rightarrow Y \in I$

■ $M(S) = (S, I(S))$

- $S \subseteq E, I(S) = \{X \cap S | X \in I\}$
- 独立系
- $\rho_{\max}(S) = \max\{|B| | B \text{ は } M(S) \text{ の基}\}$
- $\rho_{\min}(S) = \min\{|B| | B \text{ は } M(S) \text{ の基}\}$

$$\blacksquare q(M) = \max \left(\frac{\rho_{\max}(S)}{\rho_{\min}(S)} \mid S \subseteq E, \rho_{\min}(S) \neq 0 \right)$$



$$M(S) = (S, I(S)), S = E \setminus \{a\}$$

貪欲アルゴリズムがだまされる例

- $M_n^h = (E(K_n), I_n^h)$: 独立系 (マトロイドではない)
 - I_n^h : 辺を追加してハミルトン閉路にできる辺集合 $S (\subseteq E(K_n))$ の集合
- 性質: ハミルトン閉路の辺集合の部分集合

例: $M_4^h = (E(K_4), I_4^h)$

$M_4^h(S) = (S, I_4^h)$

$S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

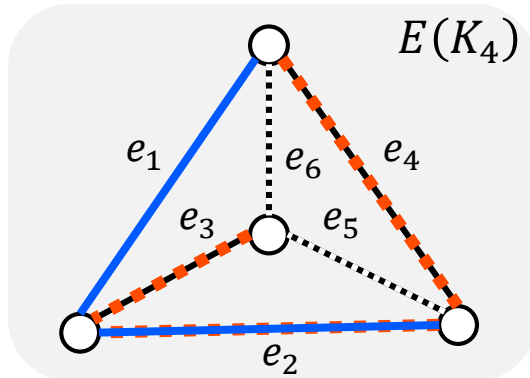
$M_4^h(S)$ の基

最大: $\rho_{\max}(S) = 3$

$X = \{e_2, e_3, e_4\} \in I_4^h$

最小: $\rho_{\min}(S) = 2$

$Y = \{e_1, e_2\} \in I_4^h$



正解は最大を選ぶ場合であるが、貪欲アルゴリズムは最小を選ぶように仕向ける
この構造では正解との差は高々1.5倍に収まる

最悪の場合でも $q(M) = \max \left(\frac{\rho_{\max}(S)}{\rho_{\min}(S)} \mid S \subseteq E, \rho_{\min}(S) \neq 0 \right)$

最大基問題：貪欲アルゴリズムの近似比

■ **定理 (Theorem 4.13)**：最大基問題 (独立系 $M = (E, I)$)

➤ 貪欲アルゴリズム：近似比は高々 $q(M) = \max \left(\frac{\rho_{\max}(S)}{\rho_{\min}(S)} \mid S \subseteq E, \rho_{\min}(S) \neq 0 \right)$

□ 証明：

- $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}, w(e_1) \geq w(e_2) \geq \dots \geq w(e_m) \geq w(e_{m+1}) = 0$

■ $E_i = \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$

- 最大基 X

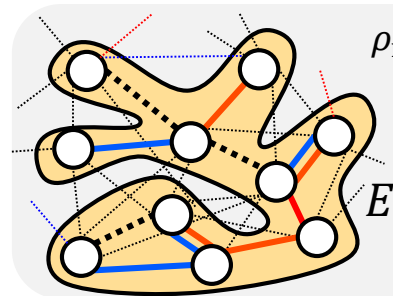
■ $X_i = X \cap E_i$ ($\because M(E_i)$ の独立集合)

- アルゴリズムの出力 B

■ $B_i = B \cap E_i$ ($\because M(E_i)$ の基)

$$\begin{aligned} - w(B) &= \sum_{i=1}^m (|B_i| - |B_{i-1}|) w(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^m |B_i| (w(e_i) - w(e_{i+1})) \\ &\geq \frac{1}{q(M)} \sum_{i=1}^m \rho_{\max}(E_i) (w(e_i) - w(e_{i+1})) \\ &\geq \frac{1}{q(M)} \sum_{i=1}^m |X_i| (w(e_i) - w(e_{i+1})) \\ &\geq \frac{1}{q(M)} \sum_{i=1}^m (|X_i| - |X_{i-1}|) w(e_i) = \frac{w(X)}{q(M)} \end{aligned}$$

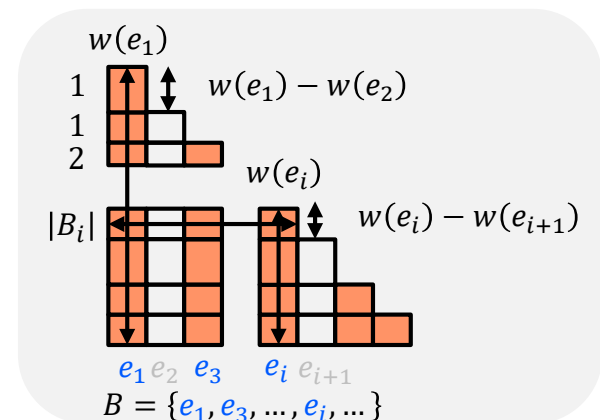
$$\therefore \frac{w(X)}{w(B)} \leq q(M)$$



$$\rho_{\max}(E_i) \geq |X_i|, \quad |B_i| \geq \rho_{\min}(E_i)$$

$$q(M) \geq \frac{\rho_{\max}(E_i)}{\rho_{\min}(E_i)}$$

$$|B_i| \geq \rho_{\min}(E_i) \geq \frac{\rho_{\max}(E_i)}{q(M)}$$



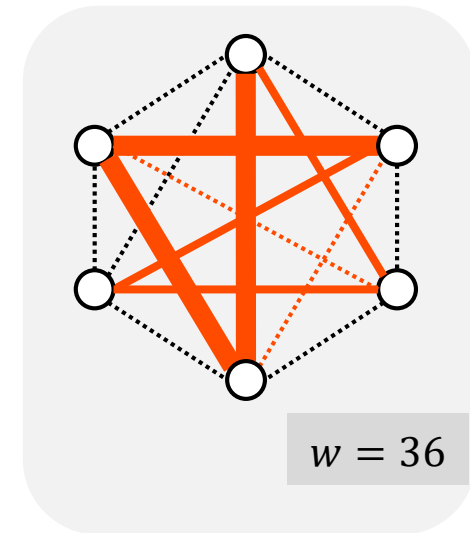
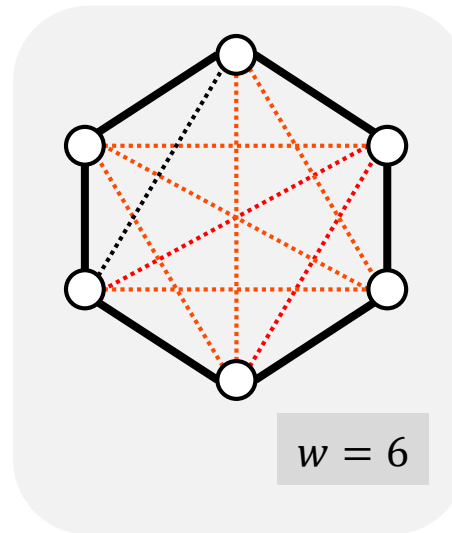
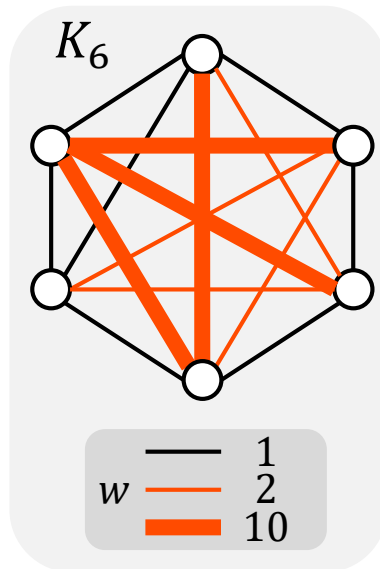
4-4 (5) 最大巡回セールスマン問題

■ 入力

➤ K_n , $w : E(K_n) \rightarrow \mathbb{R}^+$

■ 質問

➤ (K_n, w) の最大ハミルトン閉路を一つ示せ



最大巡回セールスマン問題

■ 定理 (Theorem 4.14) : 最大巡回セールスマン問題

- 貪欲アルゴリズムの近似比は高々2

□ 証明 :

$$M_n^h = (E(K_n), I_n^h)$$

- I_n^h : ハミルトン閉路にできる辺集合の集合

$$\forall S \subseteq E(K_n)$$

- $\forall Y: M(S)$ の要素数最小の基

- $\forall X: M(S)$ の要素数最大の基

$$|X| = \rho_{\max}(S), |Y| = \rho_{\min}(S) > 0$$

- $K_n \langle Y \rangle$ の点の次数1か2

$$d_2: K_n \langle Y \rangle \text{で次数2の点数}, d_1: K_n \langle Y \rangle \text{で次数1の点数}$$

$$2|Y| = 2d_2 + d_1$$

- $\forall e \in X$

- $K_n \langle Y \rangle$ の次数2の点、もしくは次数1の2点に接続

$\because e$ が次数0の2点、次数0と次数1の2点に接続する $\Rightarrow Y \cup \{e\} \in I_n^h$ で Y は基であることに矛盾

- $A = \{e \in X \mid K_n \langle Y \rangle \text{の次数2に接続}\}, B = \{e \in X \setminus A \mid K_n \langle Y \rangle \text{の次数1に接続}\}$

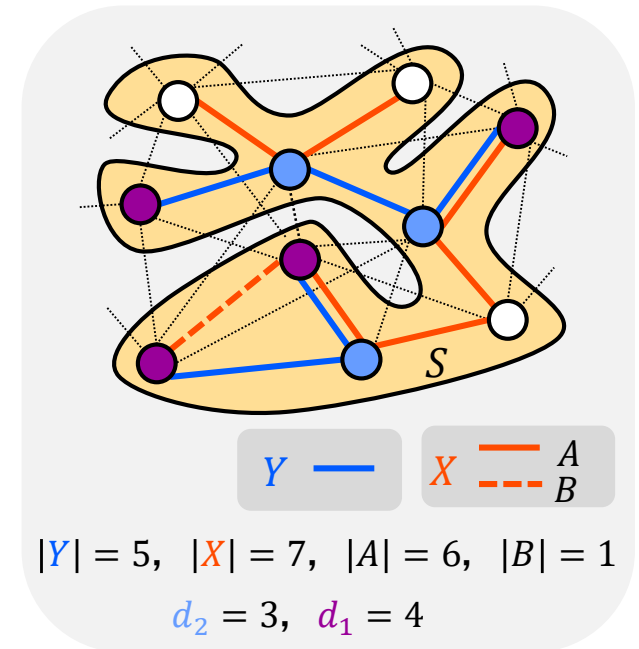
$$|X| = |A| + |B|$$

- $|A| \leq 2d_2$ $\because K_n \langle Y \rangle$ の次数2の各点に接続できる A の辺はそれぞれ2辺まで

- $|B| \leq d_1/2$ $\because B$ の各辺は $K_n \langle Y \rangle$ の次数1の2点に接続

$$2|Y| = 2d_2 + d_1 \geq |A| + 2|B| \geq |A| + |B| = |X| \Rightarrow \frac{|X|}{|Y|} \leq q(M_n^h) < 2$$

$$2 * 5 = 2 * 3 + 4 \geq 6 + 2 * 1 \geq 6 + 1 = 7$$



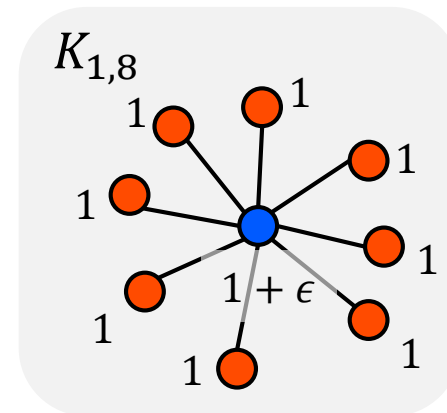
最大独立点集合問題

■ 入力

➤ $G, w : V(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$

■ 質問

➤ (G, w) の最大独立点集合を一つ示せ



■ 定理 : 最大独立点集合問題

- 貪欲アルゴリズムの近似比は少なくとも $\Omega(n)$

□ 証明

- $M^{\text{ind}}(G) = (V(G), I^{\text{ind}}(G))$ ($I^{\text{ind}}(G)$: 独立点集合の族)は独立系

- $\rho_{\max}(V(K_{1,n-1})) = n - 1, \rho_{\min}(V(K_{1,n-1})) = 1$

- $q(M^{\text{ind}}(K_{1,n-1})) \geq \frac{\rho_{\max}(V(K_{1,n-1}))}{\rho_{\min}(V(K_{1,n-1}))} = n - 1 = \Omega(n)$

アルゴリズムの性能

■ 巡回セールスマン問題

最適化	辺重み(非負)	アルゴリズム	近似比
最小	一般	任意	$P \neq NP$ ならば $O(1)$ ではない
	三角不等式	アルゴリズム4-3	高々2
最大	一般	貪欲	高々2

■ 独立点集合問題

最適化	点重み(非負)	アルゴリズム	近似比
最大	一般	貪欲	少なくとも $\Omega(n)$

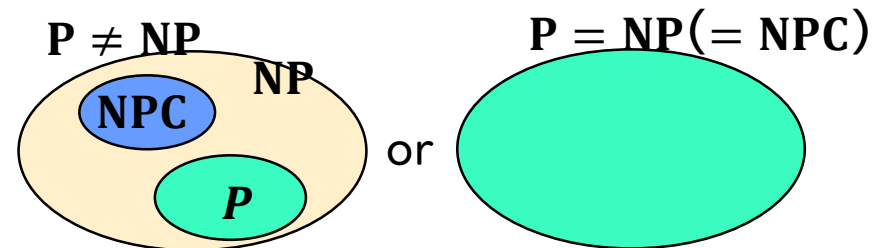
P ≠ NP予想

■ 判定問題 (Yes/No問題)

- NP : 判定問題の集合
 - **N**ondeterministic **P**olynomial time algorithmあり
- P : 判定問題の集合
 - (Deterministic) **P**olynomial time algorithmあり
- NPC: NPの中の最も難しい判定問題の集合
 - NPCのある問題が多項式時間で解ける ⇒
NPに属すすべての問題が多項式時間で解ける
 - NP完全 (NP-complete) 問題
 - 判定問題 ∈ NPC
 - SAT, 3-SAT, COL, HG, IS, TS, ...

➤ 事実: $P \subseteq NP$

➤ 予想: $P \neq NP$



離散構造とアルゴリズム

■ 問題の定式化・分析

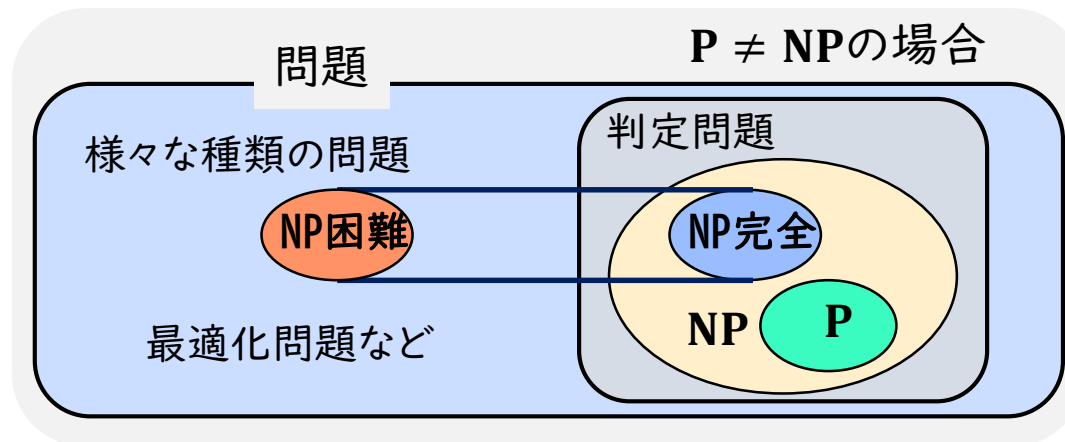
- できるかぎり解きやすい問題に

■ P問題

- 計算量の削減・下限の達成

■ NP完全・NP困難

- $P \neq NP$ ならば
 - 多項式時間アルゴリズムは存在しない
- 近似アルゴリズムや発見的手法を用いる





Tokyo Tech

離散構造とアルゴリズム

ICT.M215

完

高橋篤司

東京工業大学 工学院 情報通信系

教科書：情報とアルゴリズム（上野・高橋 森北出版）