



Tokyo Tech

離散構造とアルゴリズム (1-2) 木と森

高橋篤司

東京工業大学 工学院 情報通信系

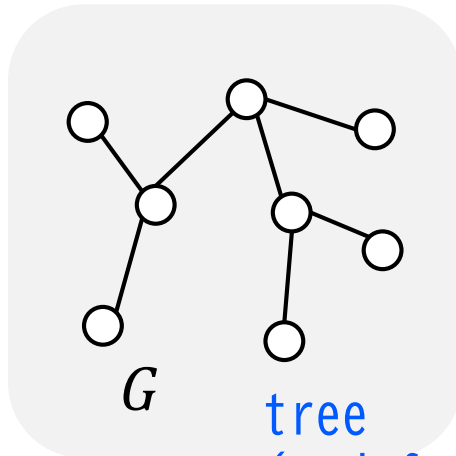
1-2 (1) 木 (Tree)

■ 木 (Tree)

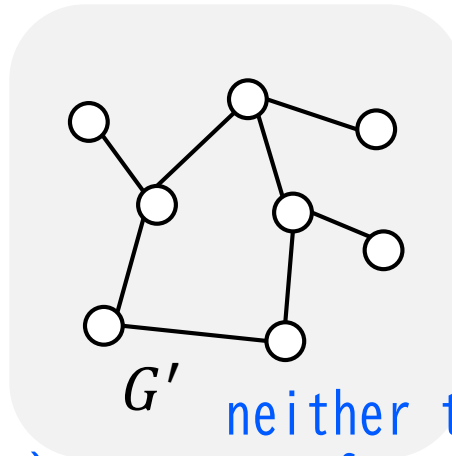
- 閉路を含まない連結グラフ

■ 森 (Forest)

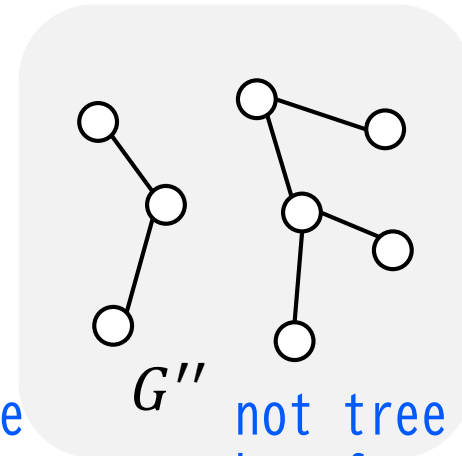
- 閉路を含まないグラフ



tree
(and forest)



neither tree
nor forest



not tree
but forest

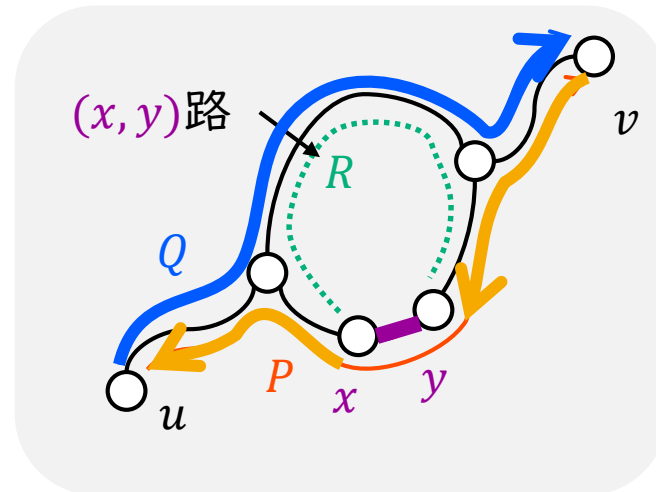
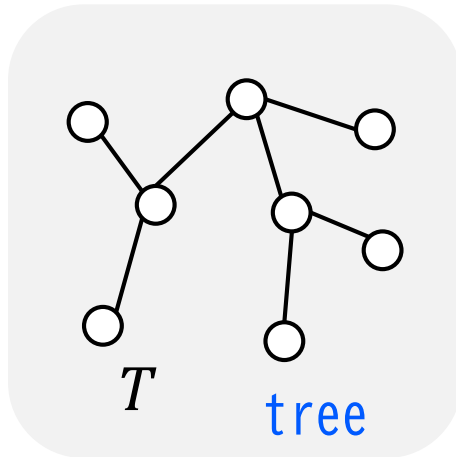
木の性質 (一意的な路)

■ 定理 (Theorem 1.4)

木の任意の2点は一意的な路で結ばれている

□ 証明: 背理法で証明

- 木 T に点 u, v を結ぶ異なる路 P, Q が存在すると仮定
- $\exists (x, y) \in E(P) \setminus E(Q)$
- $\exists (x, y)$ ウォーク $\subseteq T - \{(x, y)\} \Rightarrow \exists (x, y)$ 路 $R \subseteq T - \{(x, y)\}$
- $R + \{(x, y)\}$ は T の閉路 $\Rightarrow$ 木の定義に矛盾 ■



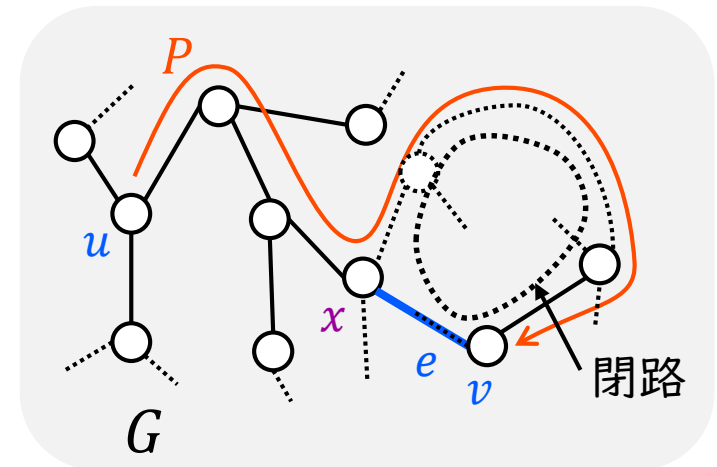
木の性質 (次数1以下の点)

■ 補題 (Lemma 1.1)

$\deg_G(v) \geq 2 \ (\forall v \in V(G)) \Rightarrow G$ は閉路を含む

□ 証明:

- ある点 u を始点とする長さが極大な路 P を考える
- P の終点 v
 - v には P に含まれない辺 e が接続 $\because \deg_G(v) \geq 2$
 - P は極大 $\Rightarrow e = (v, x)$ の端点 x は P に含まれる
 - ✓ 閉路が存在 ■



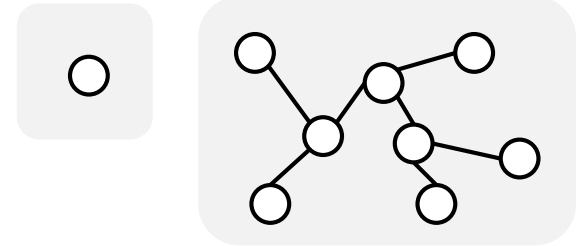
木の性質 (次数1の点)

■ 系 (Corollary 1.1)

- 2点以上からなる木には次数1の点が存在

□ 証明:

- 補題(Lemma 1.1)より, $\exists v \in V(T)$ s. t. $\deg_T(v) \leq 1$
- T は連結 $\Rightarrow \deg_T(v) \neq 0 \therefore \deg_T(v) = 1$ ■

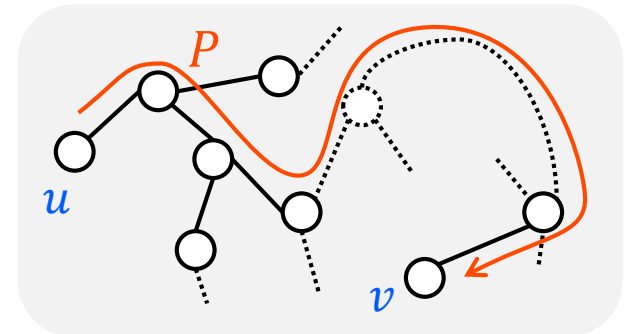


■ 系

- 2点以上からなる木には次数1の点が2点以上存在

□ 証明:

- 次数1の点を始点とする
極大な路の終点は次数1 ■



✓ 次数1の点が3点以上存在する,とは言えない

論理 (確認)

■ 定理 (補題, 系)

- 恒真式 (tautology)

- 命題変数の真偽によらず常に真である命題論理式

■ 証明系

- 公理 (axiom)

- 恒真
- 前提条件

- 推論規則 (inference rule)

- 命題論理式から命題論理式を得る

α	β	$\alpha \vee \neg \alpha$	$\alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

➤ 完全な証明系

- 任意の恒真式を証明できる

➤ 健全な証明系

- 健全な推論規則のみを持つ
 - 健全な推論規則
 - 恒真式が与えられると恒真式が結論として得られる推論規則

数学的帰納法 (確認)

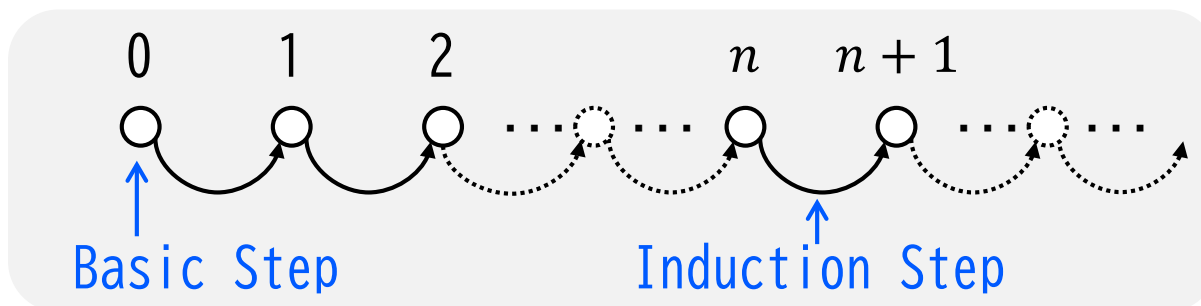
■ 定理

- property $P(n)$ holds for all natural numbers ($\mathbb{N}$)

□ 証明:

- 初期段階 : Show that $P(0)$ holds
- 帰納段階 : Show that if $P(n)$ holds, then $P(n+1)$ also holds ■

Induction Hypothesis



数学的帰納法 (確認)

■ 定理

- $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ for $\forall n \in \mathbb{N}$

□ 証明: n に関する数学的帰納法

- 初期段階 ($n = 0$)

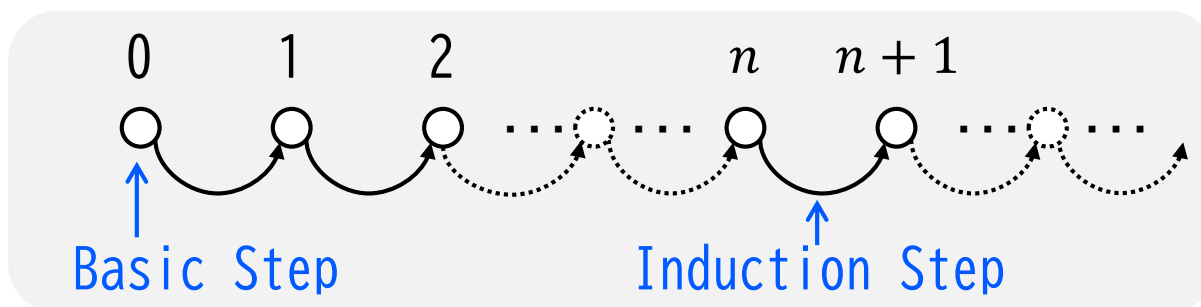
■ $\sum_{k=0}^0 k = 0 = \frac{0 \times 1}{2}$

- 帰納段階 ($n \geq 1$)

■ Assume $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ (induction hypothesis)

■ $\sum_{k=0}^{n+1} k = (\underbrace{\sum_{k=0}^n k}_{\text{Induction hypothesis}}) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Induction hypothesis



木の性質 (辺数)

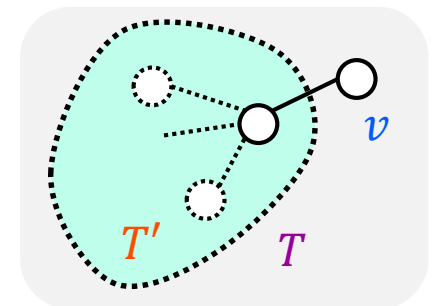
■ 定理 (Theorem 1.5)

$$T \text{ は木} \Rightarrow |E(T)| = |V(T)| - 1$$

□ 証明：点数に関する数学的帰納法

- 初期段階 : $|V(T)| = 1$
- 帰納段階 : $|V(T)| \geq 2$
 - 点数 $k + 1$ の任意の木 T で成り立つことを示す
 - 帰納法の仮定 : 点数 k ($k \geq 1$) の木で成立
 - 系 1.1 より, $\exists v \in V(T)$ s. t. $\deg_T(v) = 1$
 - T' : T から v とその接続辺を取り除いて得られた木
 - $|E(T')| = |E(T)| - 1, |V(T')| = |V(T)| - 1$
 - $|E(T')| = |V(T')| - 1$ ∴ induction hypothesis
 - したがって, $|E(T)| = |V(T)| - 1$ ■

○ 1点からなる木



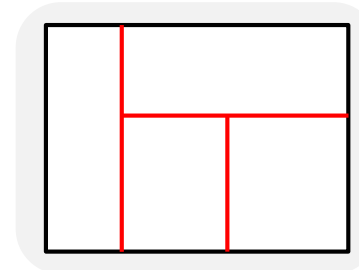
◆ ありがちな (不完全な) 証明の方針

- ✓ 木に次数1の点を加えた1点多い木で成り立つことを示す
 - ✓ すべての木で成り立つか?
 - 木の構成方法で, すべての木が構成できることを示さなければ, 証明としては不完全

数学的帰納法（確認：例）

■ 矩形分割

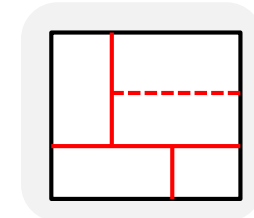
- 矩形の小矩形への分割
 - 水平・垂直線分を挿入
 - 線分は交差せず、丁字形に接する



■ 定理：小矩形数=挿入線分数+1

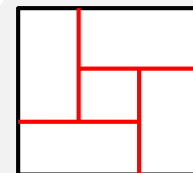
□（不完全な）証明：挿入線分数 n に関する数学的帰納法

- 初期段階：($n = 0$) 小矩形数=1で成立
- 帰納段階： $n = k$ のとき成立と仮定、 $n = k + 1$ のとき成立を示す
 - 任意の挿入線分数 k の矩形分割
 - 小矩形数は $k + 1$
 - その任意の小矩形に線分を挿入し2つの小矩形に分割
 - 挿入線分数 $k + 1$ の矩形分割で、小矩形数は $k + 2$
 - 得られた矩形分割で成立 ■



✓ すべての矩形分割で示したか？

- 4畳半構造矩形分割は？



矩形分割への線分挿入では
得られない矩形分割

森の性質 (連結成分数)

■ 定理 (Theorem 1.6)

- 森 F の連結成分数は $|V(F)| - |E(F)|$

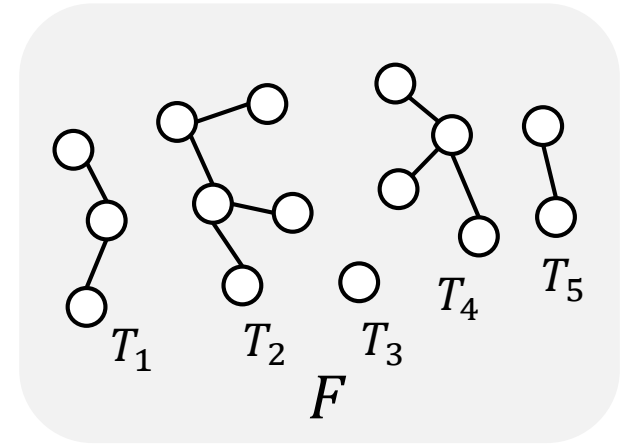
□ 証明:

- 森 F の連結成分を $T_1, T_2, \dots, T_k$
- 森の連結成分は木

- $|E(T_i)| = |V(T_i)| - 1 \quad (1 \leq i \leq k) \quad (\because \text{定理1.5})$

- $|E(F)| = \sum_{i=1}^k |E(T_i)| = \sum_{i=1}^k (|V(T_i)| - 1) = |V(F)| - k$

- $k = |V(F)| - |E(F)| \quad \blacksquare$



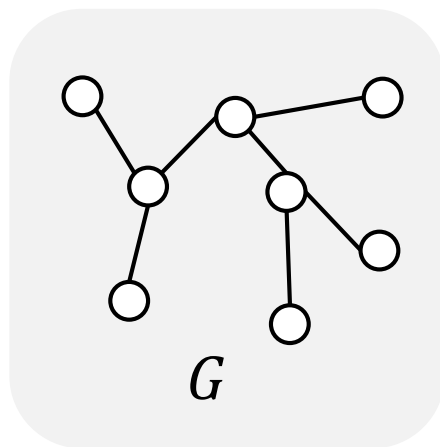
木の性質 (無閉路, 辺数)

■ 系 (tree)

- 閉路を含まない $|E(G)| = |V(G)| - 1$ のグラフ G は木

□ 証明:

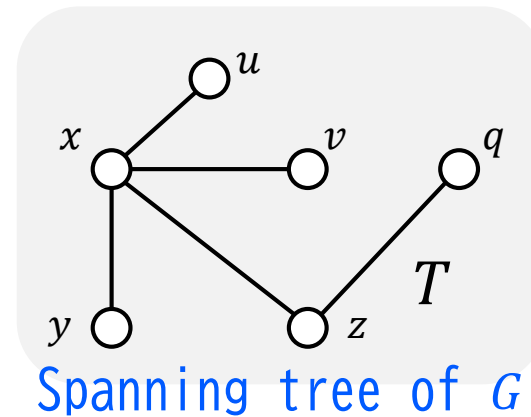
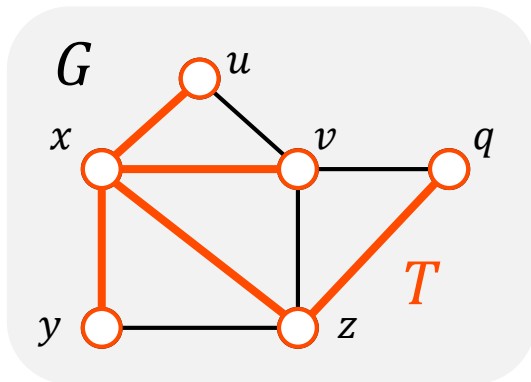
- G は森 $\because$ 閉路を含まない
- 連結成分数は $|V(G)| - |E(G)| = 1$ ($\because$ 定理1.6) ■



1-2 (2) 全域木 (Spanning Tree)

■ 全域木 (Spanning Tree)

- 木である全域部分グラフ



全域木 (Spanning Tree)

■ 定理 (Theorem 1.7)

- グラフ G は連結 $\Leftrightarrow G$ は全域木を持つ

□ 証明

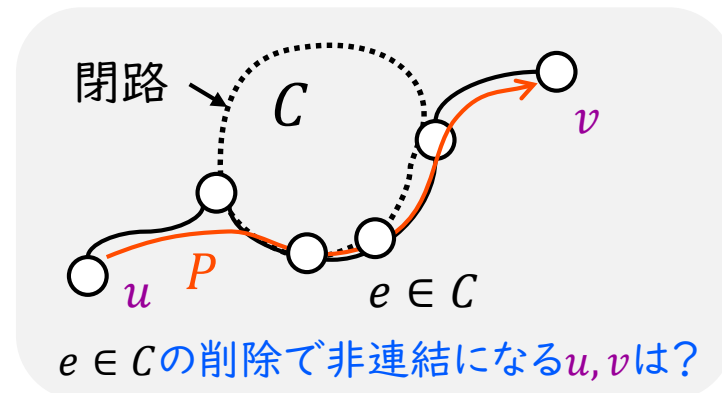
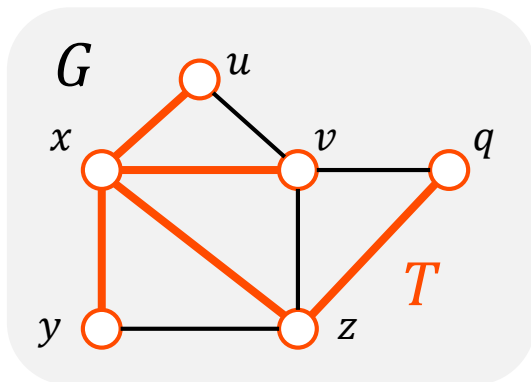
- 十分条件 ($\Leftarrow$) : 自明

- 必要条件 ($\Rightarrow$) : 極小な連結である全域部分グラフを考える

✓ 極小: どの辺を削除しても非連結となる

➤ 閉路を持つとすると

極小ではない $\therefore$ 閉路を持たない, 連結, 全域部分グラフ=全域木 ■



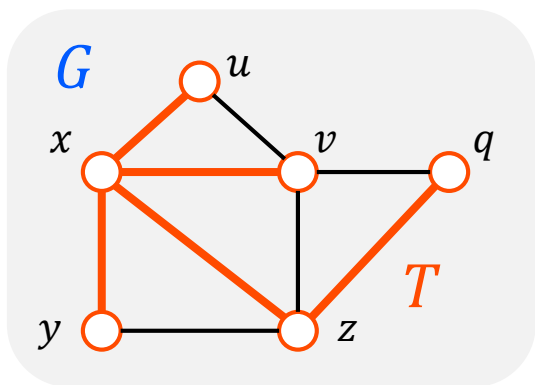
連結グラフの性質 (辺数)

■ 系 (Corollary 1.2)

- n 点の連結グラフの辺数は $n - 1$ 以上

□ 証明

- 連結グラフ G は全域木 T を持つ ($\because$ 定理1.7)
 - $|V(T)| = n, |E(T)| = n - 1$
- $|E(G)| \geq |E(T)|$ より, G の辺数は $n - 1$ 以上 ■



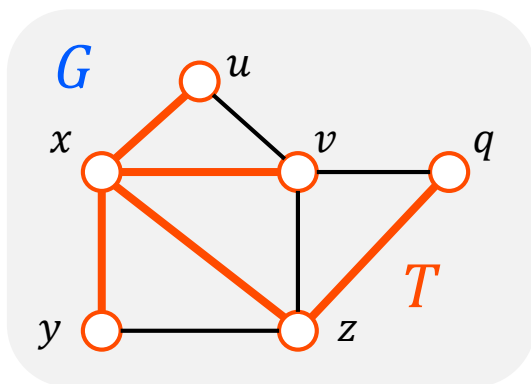
全域木の性質 (一意的な閉路)

■ **定理** (Theorem 1.8): T は G の全域木

$\Rightarrow \forall e \in E(G) \setminus E(T), T + \{e\}$ は一意的な閉路を持つ

□ 証明

- $e = (u, v), u \in V(T), v \in V(T)$
- T には一意的な (u, v) 路 P ($\because$ 定理1.4)
- $P + \{e\}$ は閉路
- それ以外に閉路は存在しない ■



木の性質 (連結, 無閉路, 辺数)

- a. 連結
- b. 無閉路
- c. 辺数: $|E(G)| = |V(G)| - 1$

■ 木の定義 連結 & 無閉路

- a. 連結 & b. 無閉路 $\Rightarrow$ c. 辺数 (定理1.5)
- b. 無閉路 & c. 辺数 $\Rightarrow$ a. 連結 (系(tree))
- a. 連結 & c. 辺数 $\Rightarrow$ b. 無閉路

■ a : 全域木 T が存在 ($\because$ 定理1.7).

- T の辺数は $|V(G)| - 1$

■ c : G の辺数は $|V(G)| - 1$

- T の辺数と一致 $\Rightarrow G = T$

- 葉以外の点

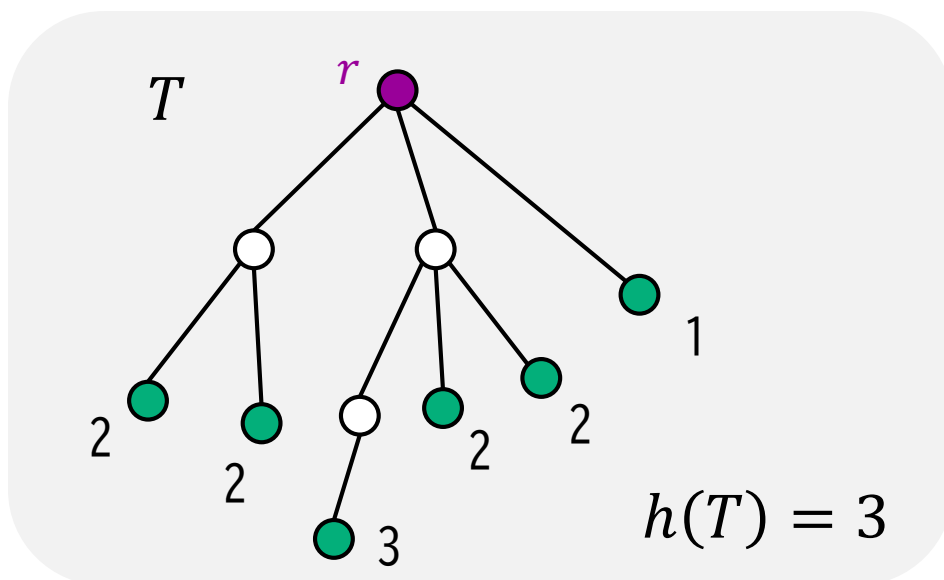


根付き木 (高さ)

■ 根付き木 (Rooted Tree)

- 高さ(height) : $h(T) = \max_{l \in L} \text{dis}_T(r, l)$

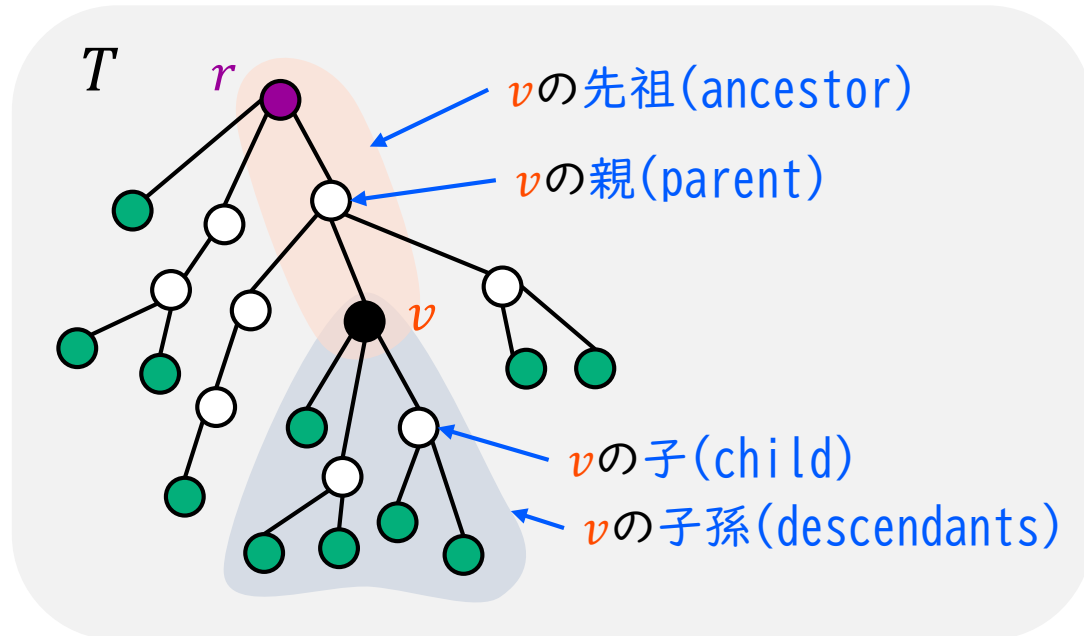
■ 根から葉までの最大距離



根付き木 (親子)

■ 根付き木 (Rooted Tree)

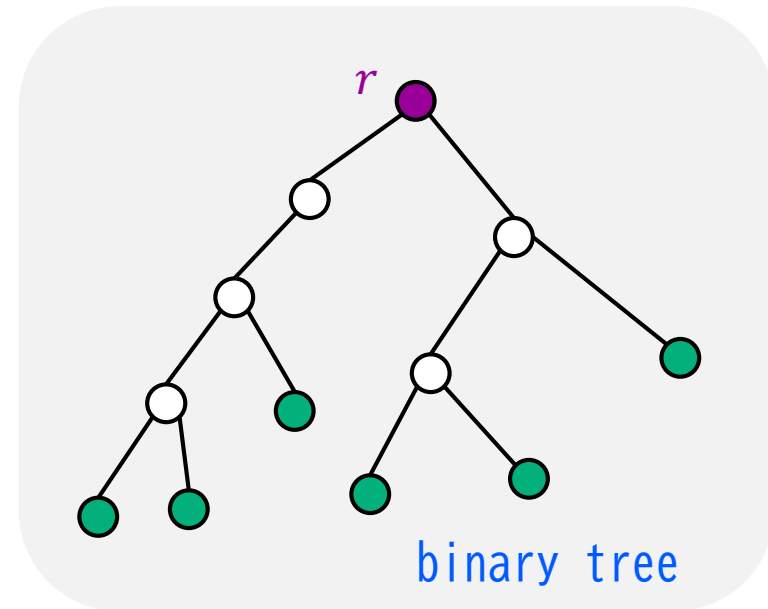
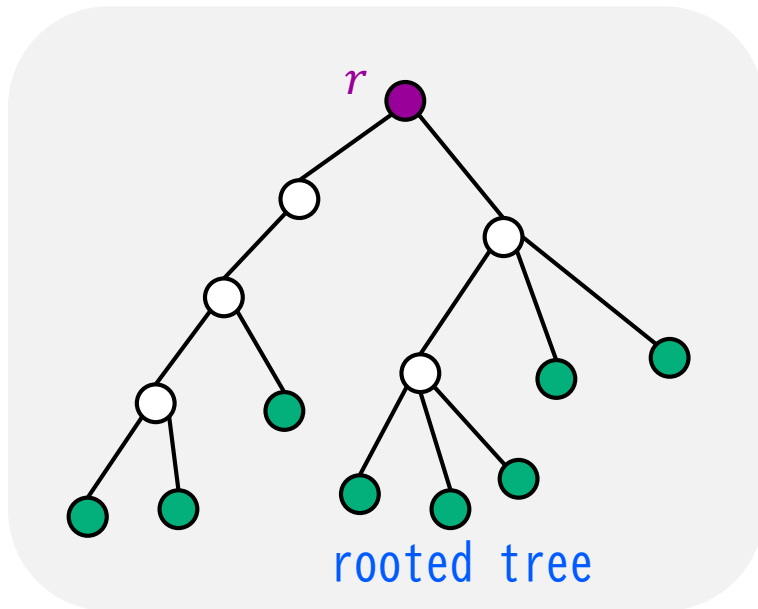
- 親 (parent)
 - 根側の隣接点
- 子 (child)
 - 葉側の隣接点
- 先祖 (ancestor)
 - 根側の点
- 子孫 (descendants)
 - 葉側の点



2分木 (Binary Tree)

■ 2分木 (Binary Tree)

- 各点の**子が高々2**の根付き木

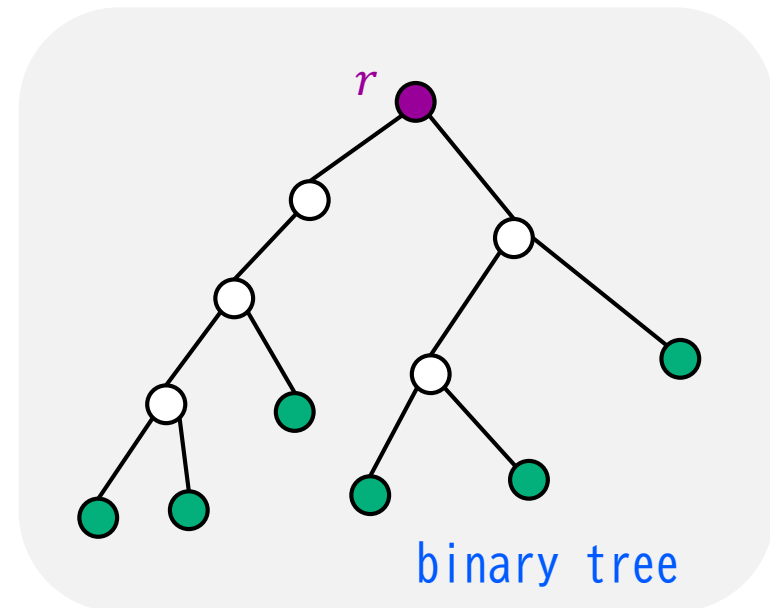
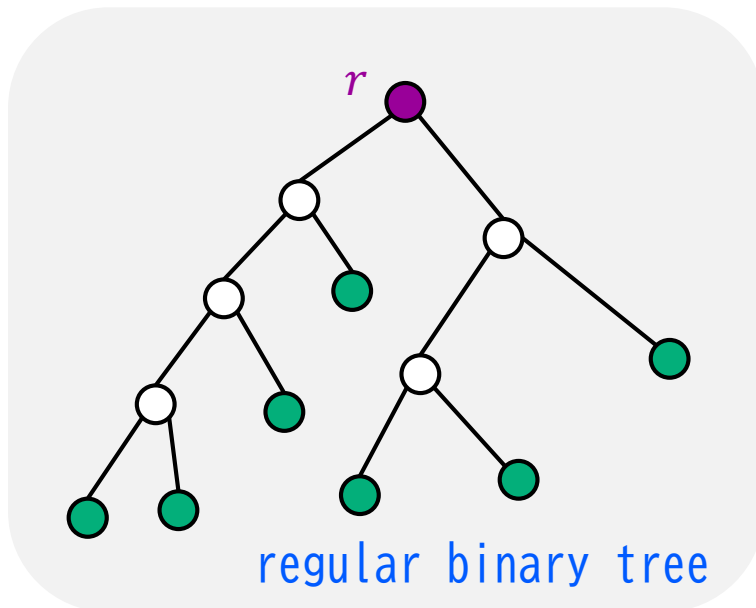


2分木 (正則)

■ 2分木 (Binary Tree)

- 正則 (regular)

■ すべての内点の子は2つ

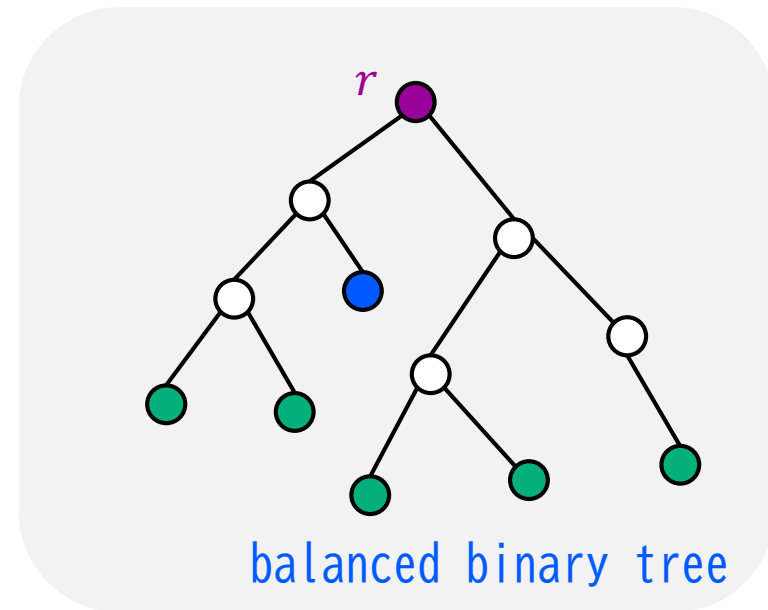
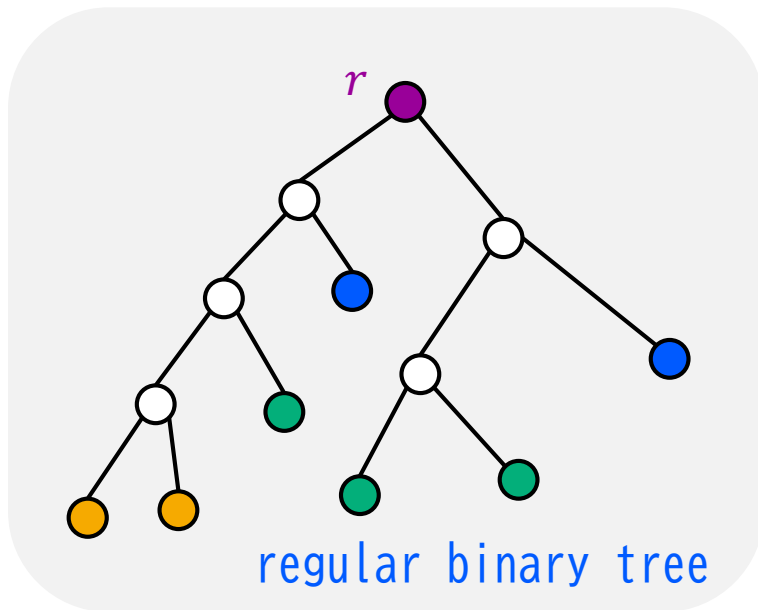


2分木 (均衡)

■ 2分木 (Binary Tree)

- 均衡 (balanced)

■ 根から葉までの距離が $h(T)$ or $h(T) - 1$

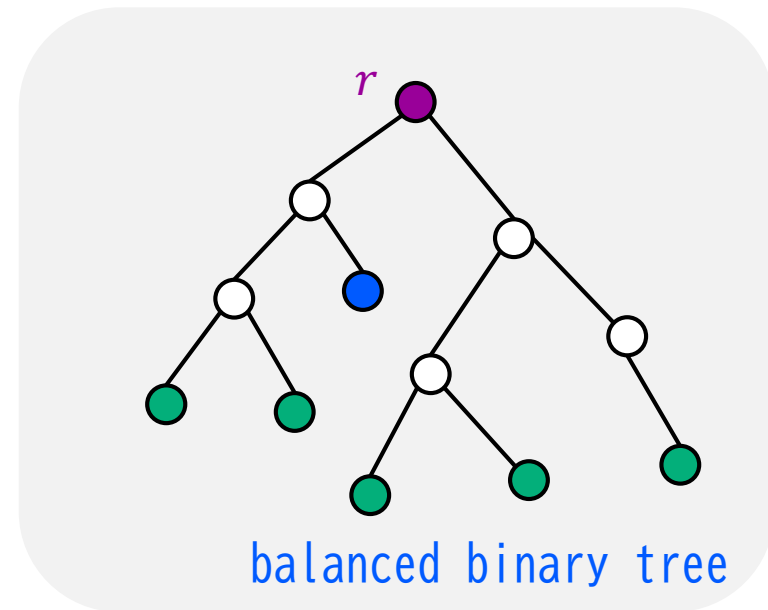
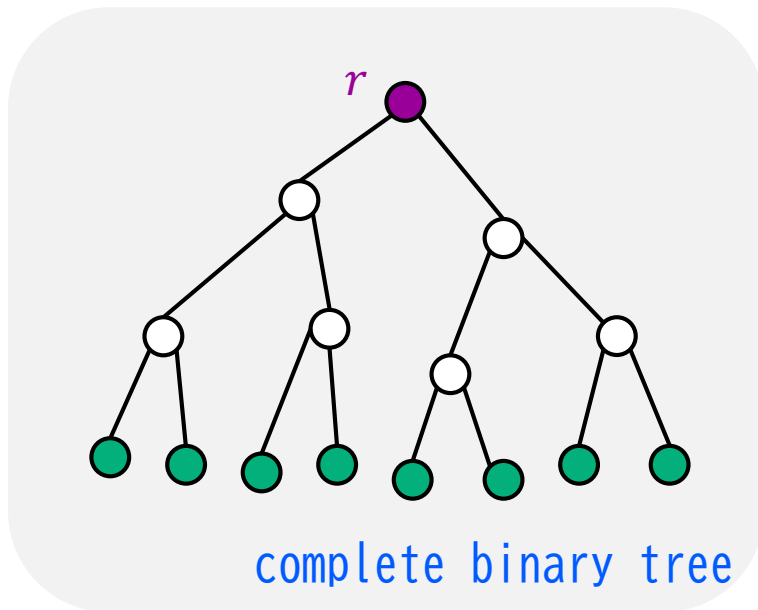


2分木 (完全)

■ 2分木 (Binary Tree)

- 完全 (complete)

■ 正則, かつ, 根から葉までの距離が $h(T)$



2分木 (点数)

■ 2分木 (Binary Tree) : $T = (V, E, r)$

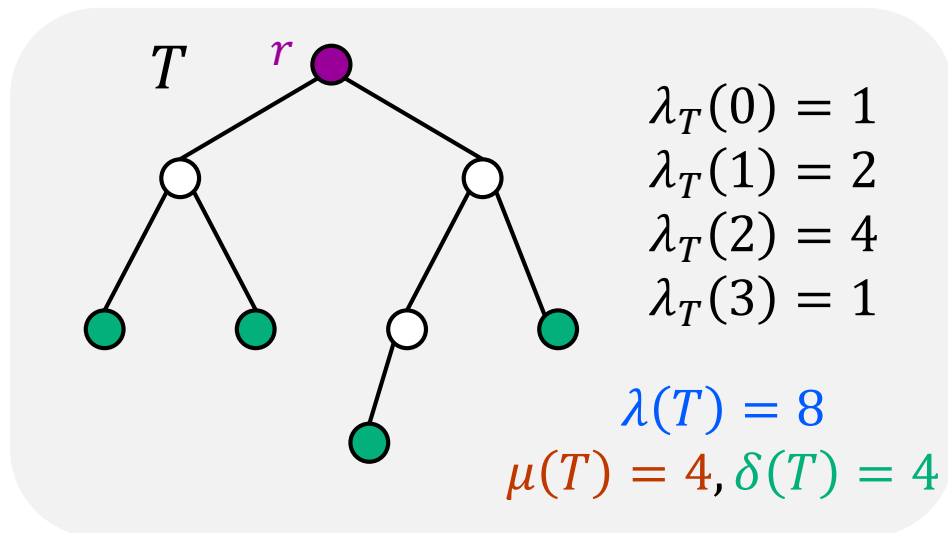
- 点数: $\lambda(T) = |V|$

■ レベル (根からの距離 $\text{dis}_T(r, v)$) i の点数 : $\lambda_T(i)$

- $\lambda(T) = \sum_{i=0}^{h(T)} \lambda_T(i)$

■ 内点数: $\mu(T)$

■ 葉数 : $\delta(T)$



2分木 (葉数)

■ 定理 (Theorem 1.9)

$$\text{2分木 } T \text{ の葉数 } \delta(T) \leq 2^{h(T)}$$

□ 証明： 木の高さ $h(T)$ に関する数学的帰納法

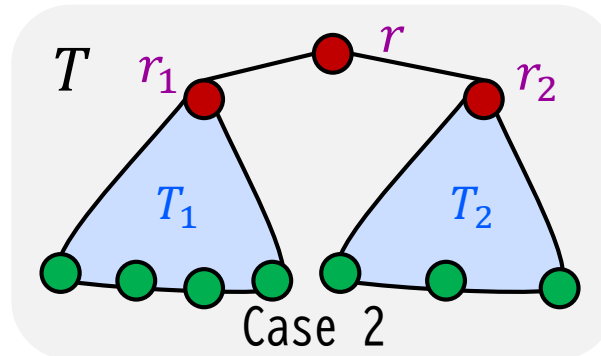
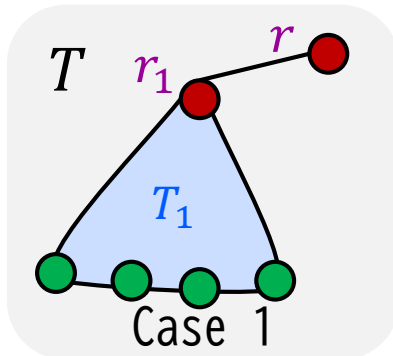
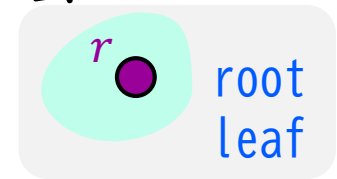
- 初期段階 : $h(T) = 0 \Rightarrow \delta(T) = 1 = 2^0$

- 帰納段階 : $h(T) \geq 1$

■ 高さ k ($k \geq 1$) の任意の2分木 T で成り立つことを示す

- 帰納法の仮定 : 高さ $h(T) \leq k - 1$ ($k \geq 1$) の木で $\delta(T) \leq 2^{h(T)}$

■ r の次数で場合分け



T_1, T_2 の葉 $\Leftrightarrow T$ の葉
 T_1, T_2 の高さ $k - 1$ 以下
 $\delta(T_1) \leq 2^{k-1}$
 $\delta(T_2) \leq 2^{k-1}$

2分木 (葉数つづき)

■ 定理 (Theorem 1.9)

2分木 T の葉数 $\delta(T) \leq 2^{h(T)}$

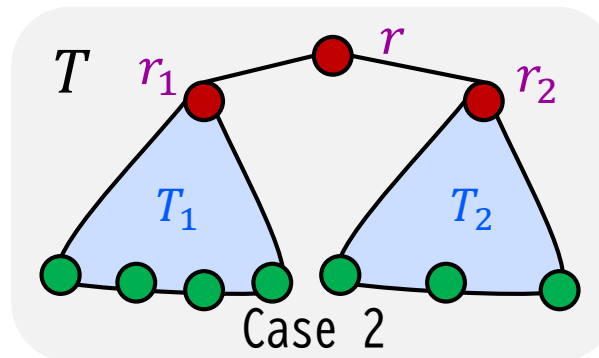
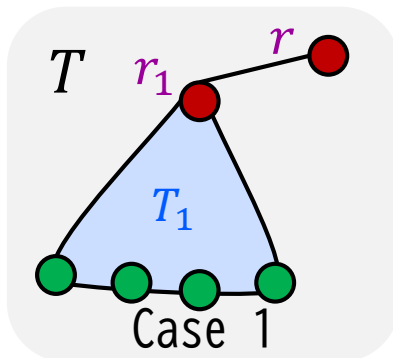
□ 証明： 木の高さ $h(T)$ に関する数学的帰納法

- 帰納段階 : $h(T) \geq 1$

- 帰納法の仮定 : 高さ $h(T) \leq k-1$ ($k \geq 1$)の木で $\delta(T) \leq 2^{h(T)}$

■ Case 1: $\delta(T) \leq 2^{k-1} < 2^k$

■ Case 2: $\delta(T) \leq 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$



T_1, T_2 の葉 $\Leftrightarrow T$ の葉
 T_1, T_2 の高さ $k-1$ 以下
 $\delta(T_1) \leq 2^{k-1}$
 $\delta(T_2) \leq 2^{k-1}$

2分木 (内点数)

■ **定理 (内点数)** : 2分木 T の内点数 $\mu(T) \leq 2^{h(T)} - 1$

□ **証明** : 木の高さ $h(T)$ に関する数学的帰納法

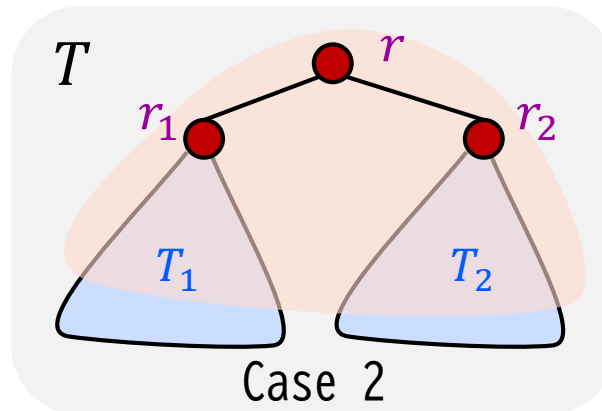
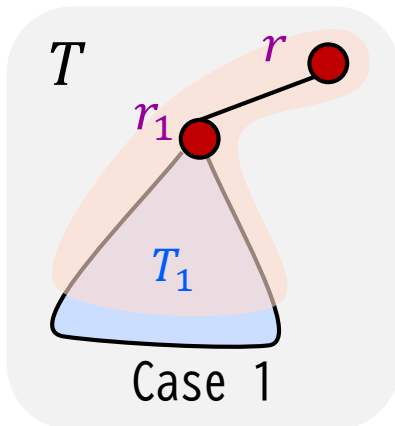
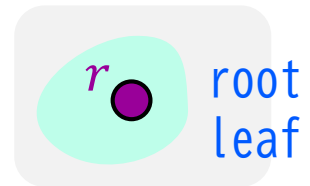
- **初期段階** : $h(T) = 0 \Rightarrow \mu(T) = 0$ (内点なし)

- **帰納段階** : $h(T) \geq 1$

■ 高さ k ($k \geq 1$)の**任意の2分木 T** で成り立つことを示す

- 帰納法の仮定 : 高さ $h(T) \leq k - 1$ ($k \geq 1$)の木で $\mu(T) \leq 2^{h(T)} - 1$

■ r の次数で場合分け



T_1, T_2 の内点 $\Rightarrow T$ の内点
 T_1, T_2 の高さ $k - 1$ 以下
 $\mu(T_1) \leq 2^{k-1} - 1$
 $\mu(T_2) \leq 2^{k-1} - 1$

2分木 (内点数つづき)

■ **定理 (内点数)** : 2分木 T の内点数 $\mu(T) \leq 2^{h(T)} - 1$

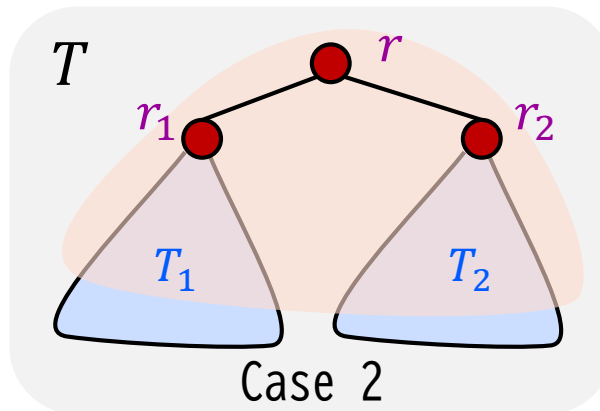
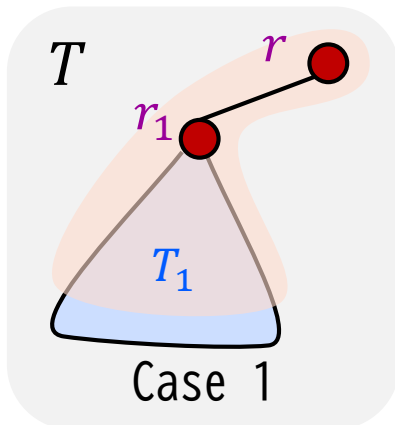
□ **証明** : 木の高さ $h(T)$ に関する数学的帰納法

- **帰納段階** : $h(T) \geq 1$

- 帰納法の仮定 : 高さ $h(T) \leq k - 1$ ($k \geq 1$)の木で $\mu(T) \leq 2^{h(T)} - 1$

■ Case 1: $\mu(T) = 1 + \mu(T_1) \leq 1 + (2^{k-1} - 1) \leq 2^{k-1} < 2^k - 1$

■ Case 2: $\mu(T) \leq 1 + \mu(T_1) + \mu(T_2)$
 $\leq 1 + (2^{k-1} - 1) + (2^{k-1} - 1) \leq 2^{k-1} + 2^{k-1} - 1 = 2^k - 1$



T_1, T_2 の内点 $\Rightarrow T$ の内点
 T_1, T_2 の高さ $k - 1$ 以下
 $\mu(T_1) \leq 2^{k-1} - 1$
 $\mu(T_2) \leq 2^{k-1} - 1$

2分木 (点数)

■ **定理 (点数)** : 2分木 T の点数 $\lambda(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1$

□ **証明**:

$$- \lambda(T) = \sum_{i=0}^{h(T)} \lambda_T(i) \leq \sum_{i=0}^{h(T)} 2^i = 2^{h(T)+1} - 1$$

■ $\forall i, \lambda_T(i) \leq 2^i$ ($\because$ 以下の補題)

■ **補題**: 2分木のレベル i の点数は高々 2^i ($\lambda_T(i) \leq 2^i$)

□ **証明**: レベル i に関する数学的帰納法

- **初期段階** : $i = 0 \Rightarrow \lambda_T(i) = 1 = 2^0$

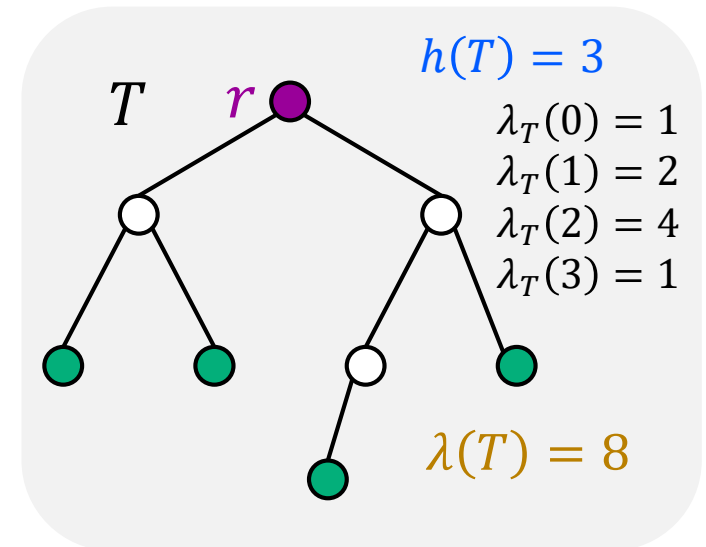
- **帰納段階** : $i \geq 1$

- レベル k ($k \geq 1$)で成り立つことを示す
 - 帰納法の仮定 : レベル $k-1$ ($k \geq 1$)で
 $\lambda_T(k-1) \leq 2^{k-1}$

■ レベル k の点はレベル $k-1$ の子

■ レベル $k-1$ の各点の子は高々2

■ $\lambda_T(k) \leq 2 \times \lambda_T(k-1) \leq 2^{k-1+1} = 2^k$



2分木 (完全2分木)

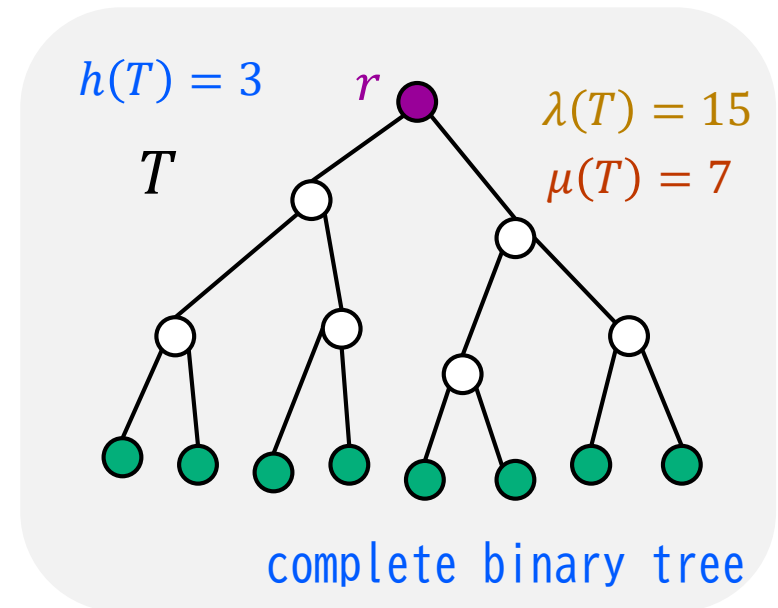
■ 定理 (完全2分木): 2分木 T

$$\text{完全} \iff \text{点数} \lambda(T) = 2^{h(T)+1} - 1$$

$$\text{完全} \implies \text{内点数} \mu(T) = 2^{h(T)} - 1$$

□ 証明:

- 各レベルの(内)点数より
- 詳細略



2分木 (正則均衡2分木)

■ **定理** (正則均衡2分木) : 正則均衡2分木 T の内点数 $\mu(T)$

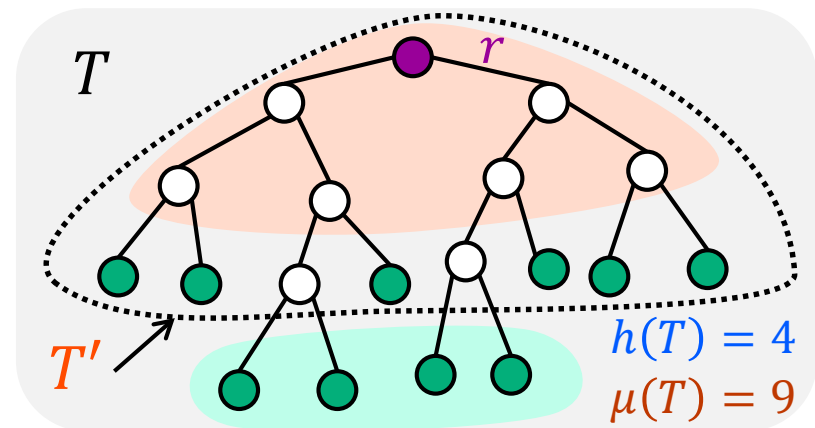
$$2^{h(T)-1} \leq \mu(T) \leq 2^{h(T)} - 1$$

□ 証明:

- $\mu(T) \leq 2^{h(T)} - 1$ ($\because$ 定理 (内点数))
- レベル $h(T)$ の葉を取り除くと完全2分木 T' が得られる
 - $h(T') = h(T) - 1$
 - T' の内点でない T の内点が存在
- $\mu(T) \geq \mu(T') + 1$

$$= (2^{h(T)-1} - 1) + 1$$

$$= 2^{h(T)-1}$$



2分木 (正則均衡2分木:2)

■ **定理** (正則均衡2分木: h) : 正則均衡2分木 T の**高さ** $h(T)$

$$h(T) = \lfloor \log_2 \mu(T) \rfloor + 1$$

□ 証明:

$$- 2^{h(T)-1} \leq \mu(T) \leq 2^{h(T)} - 1 \quad (\because \text{定理 (正則均衡2分木)})$$

$$\checkmark 2^{h(T)-1} \leq \mu(T)$$

$$\blacksquare h(T) \leq (\log_2 \mu(T)) + 1$$

$$\blacksquare h(T) \leq \lfloor \log_2 \mu(T) \rfloor + 1$$

$$\checkmark 2^{h(T)} - 1 \geq \mu(T)$$

$$\blacksquare h(T) \geq \log_2(\mu(T) + 1)$$

$$\blacksquare h(T) \geq \lfloor \log_2(\mu(T) + 1) \rfloor$$

$$\blacksquare h(T) \geq \lfloor \log_2 \mu(T) \rfloor + 1$$

$\lceil x \rceil$: 切り上げ(ceil)
 $\lfloor x \rfloor$: 切り捨て(floor)

