離散構造とアルゴリズム
(4-2) 貪欲アルゴリズム

高橋篤司
東京工業大学 工学院 情報通信系

4-2（1）独立系とマトロイド

- 貪欲アルゴリズムの性能が発揮される問題の解析
  - 貪欲アルゴリズムが正解を出すための条件は？
    - 最大全域木(Kruskal)は正解を出す
    - 巡回セールスマンは正解を出さない

- 貪欲アルゴリズムの構成
  - 空集合を出発点
  - 性質を満たした部分解に,要素を一つずつ追加
    - 性質を満たしたまま
    - 最も評価がよい要素
  - 要素を追加できなくなったら解を出力し終了

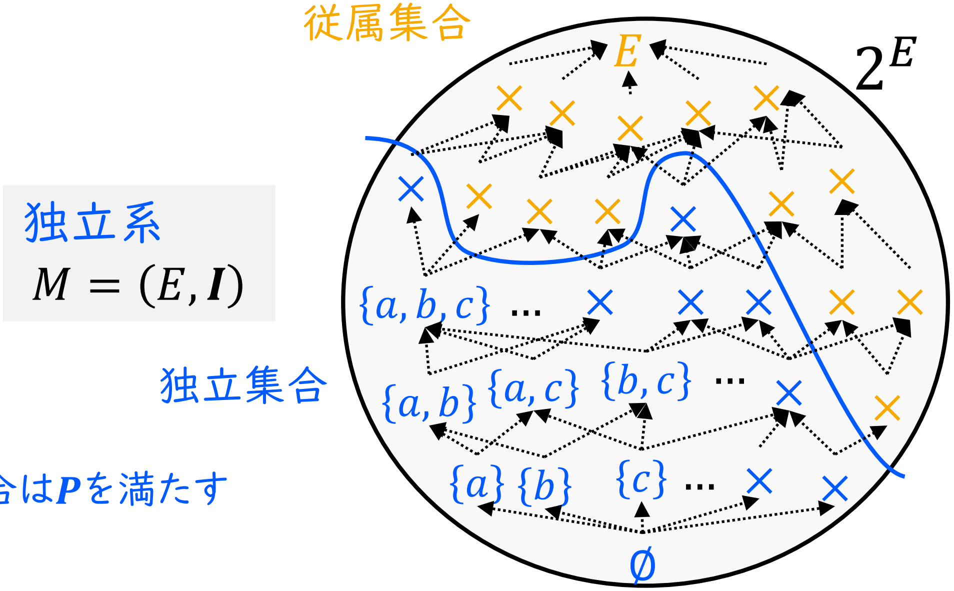
独立系 (independence system)

- 性質$\boldsymbol{P}$
  - 集合Eの部分集合に対して定義
  - $\boldsymbol{I} = \{X \subseteq E | X \in \boldsymbol{P}\}$

- 独立系 $M = (E, \boldsymbol{I})$

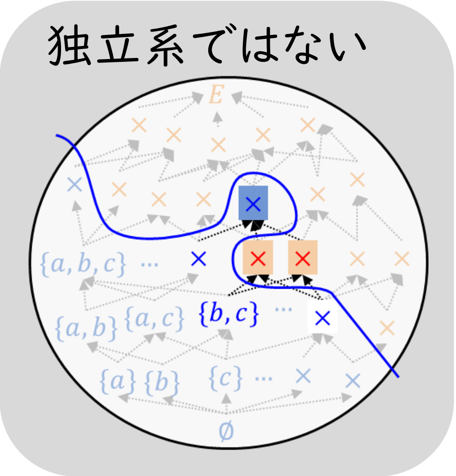
1. $\emptyset \in \boldsymbol{I}$　∴ 空集合は$\boldsymbol{P}$を満たす
2. $\forall X \in \boldsymbol{I}, Y \subseteq X \Longrightarrow Y \in \boldsymbol{I}$

∴ $\boldsymbol{P}$を満たす集合の部分集合は$\boldsymbol{P}$を満たす



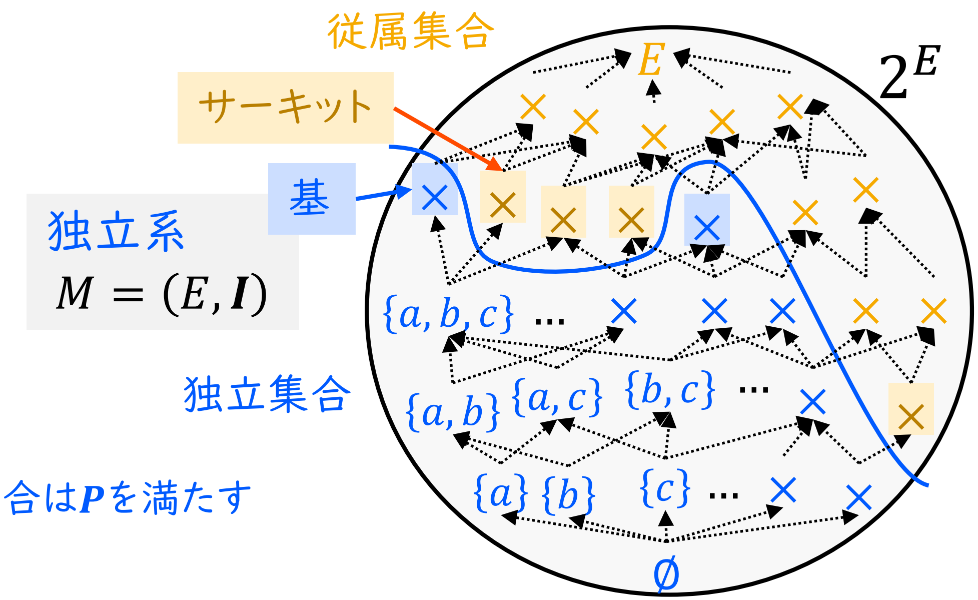
- 独立集合(independent set)：$\boldsymbol{P}$を満たす集合

- 従属集合(dependent set)　：$\boldsymbol{P}$を満たさない集合



独立系 (independence system)

- 性質$\boldsymbol{P}$
  - 集合Eの部分集合に対して定義
  - $\boldsymbol{I} = \{X \subseteq E \mid X \in \boldsymbol{P}\}$

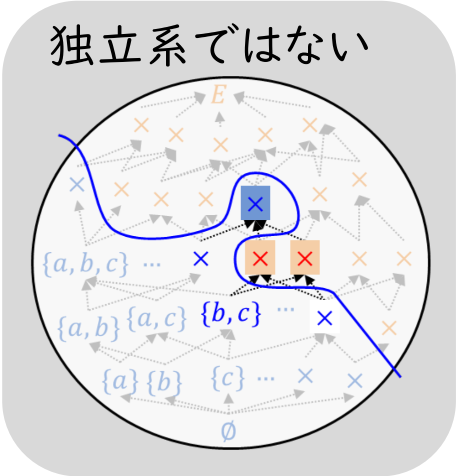


- 独立系 $M = (E, \boldsymbol{I})$

1. $\emptyset \in \boldsymbol{I}$　　∴ 空集合は$\boldsymbol{P}$を満たす
2. $\forall X \in \boldsymbol{I}, Y \subseteq X \Longrightarrow Y \in \boldsymbol{I}$

　　∴ $\boldsymbol{P}$を満たす集合の部分集合は$\boldsymbol{P}$を満たす

- 独立集合(independent set)： $\boldsymbol{P}$を満たす集合
  - 基(base)　　　　　： 極大な独立集合
- 従属集合(dependent set)　： $\boldsymbol{P}$を満たさない集合
  - サーキット (circuit)： 極小な従属集合

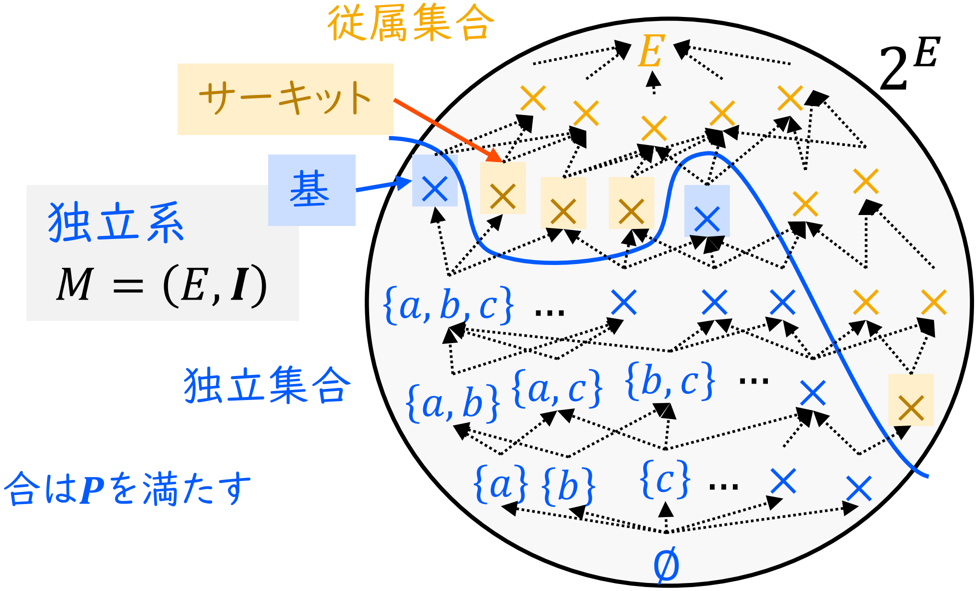


独立系 (independence system)

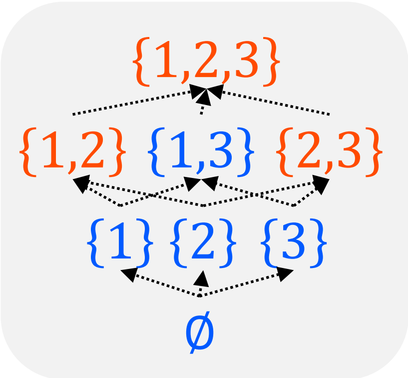
- 性質$\boldsymbol{P}$
  - 集合Eの部分集合に対して定義
  - $\boldsymbol{I} = \{X \subseteq E | X \in \boldsymbol{P}\}$

- 独立系 $M = (E, \boldsymbol{I})$

1. $\emptyset \in \boldsymbol{I}$　∴ 空集合は$\boldsymbol{P}$を満たす
2. $\forall X \in \boldsymbol{I}, Y \subseteq X \Longrightarrow Y \in \boldsymbol{I}$
   ∴ $\boldsymbol{P}$を満たす集合の部分集合は$\boldsymbol{P}$を満たす



- 例：$M = (E, \boldsymbol{I})$
  - $E = \{1,2,3\}, \boldsymbol{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}\}$
    - 基：$\{2\}, \{1,3\}$
    - サーキット：$\{1,2\}, \{2,3\}$



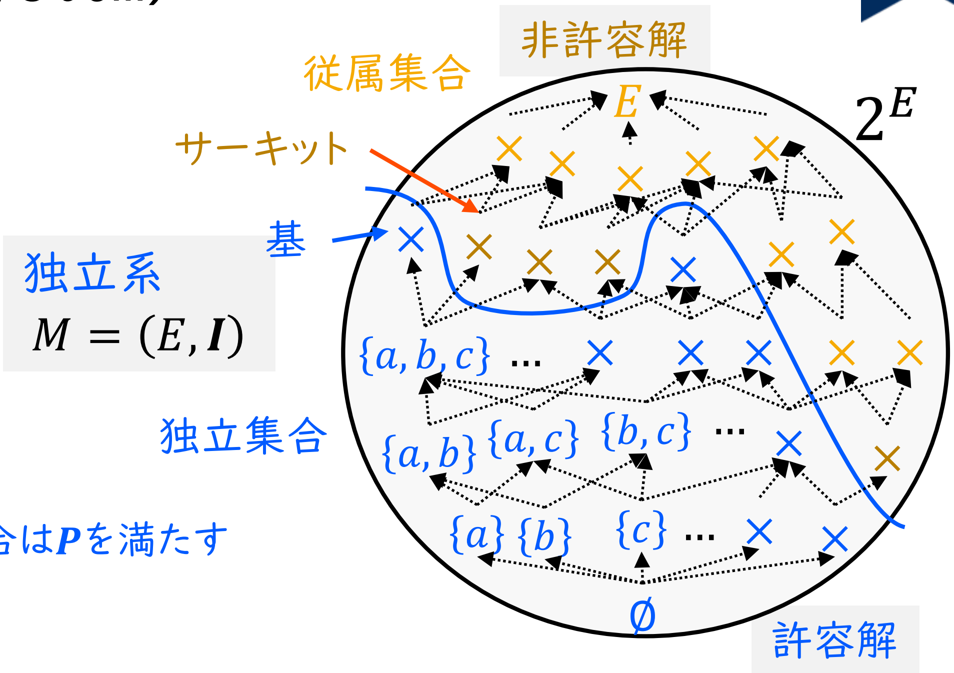
独立系 (independence system)

- 性質$\boldsymbol{P}$
  - 集合Eの部分集合に対して定義
  - $\boldsymbol{I} = \{X \subseteq E \mid X \in \boldsymbol{P}\}$

- 独立系 $M = (E, \boldsymbol{I})$

1. $\emptyset \in \boldsymbol{I}$　∴ 空集合は$\boldsymbol{P}$を満たす
2. $\forall X \in \boldsymbol{I}, Y \subseteq X \Longrightarrow Y \in \boldsymbol{I}$

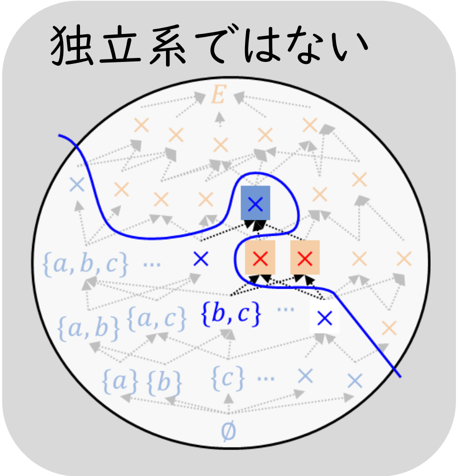
∴ $\boldsymbol{P}$を満たす集合の部分集合は$\boldsymbol{P}$を満たす



- 貪欲アルゴリズム
  - 入力 ： $M = (E, \boldsymbol{I})$, 重み関数 $w: E \to \mathbb{R}$

1. $\emptyset \in \boldsymbol{I}$　∴ 初期解あり（解を出力）
2. $\forall X \in \boldsymbol{I}, Y \subseteq X \Longrightarrow Y \in \boldsymbol{I}$

∴ 性質を満たす任意の解に到達可（基を出力）

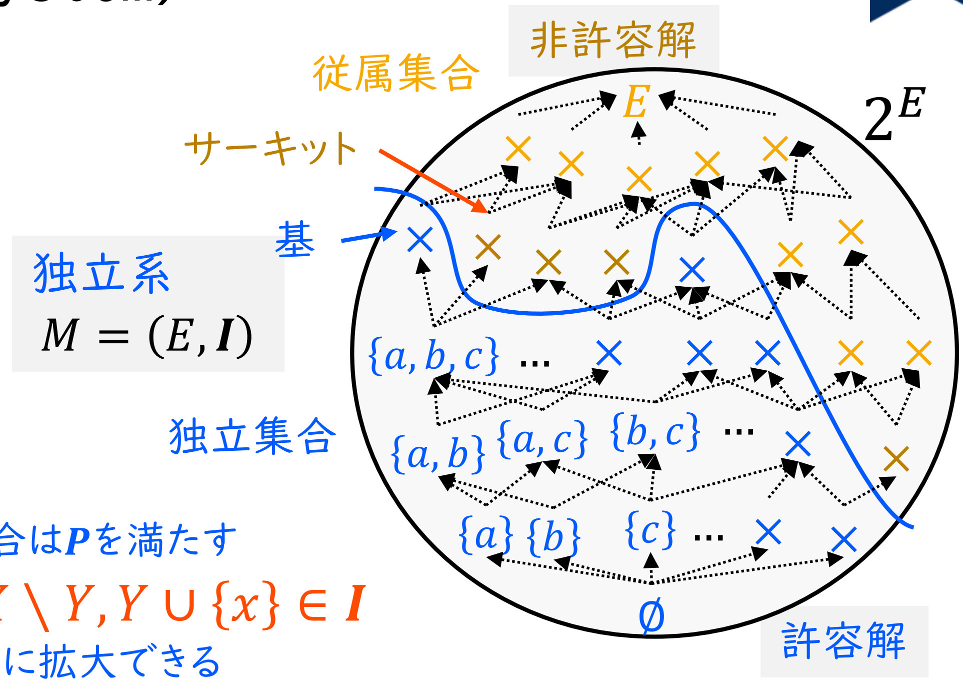


独立系 (independence system)

- 性質$\boldsymbol{P}$
  - 集合Eの部分集合に対して定義
  - $\boldsymbol{I} = \{X \subseteq E | X \in \boldsymbol{P}\}$

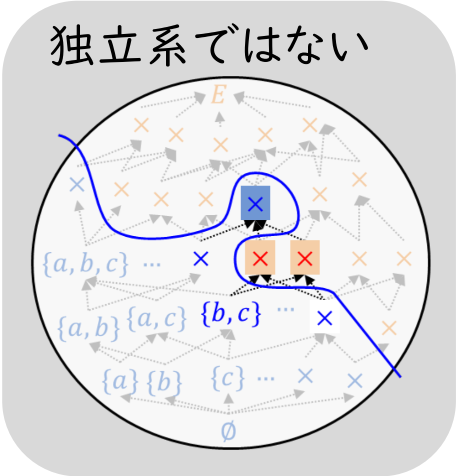
- マトロイド $M = (E, \boldsymbol{I})$

1. $\emptyset \in \boldsymbol{I}$ ∴ 空集合は$\boldsymbol{P}$を満たす
2. $\forall X \in \boldsymbol{I}, Y \subseteq X \Longrightarrow Y \in \boldsymbol{I}$
   ∴ $\boldsymbol{P}$を満たす集合の部分集合は$\boldsymbol{P}$を満たす
3. $\forall X, Y \in \boldsymbol{I}, |Y| < |X| \Longrightarrow \exists x \in X \setminus Y, Y \cup \{x\} \in \boldsymbol{I}$
   ∴ $\boldsymbol{P}$を満たすより大きい集合に拡大できる



- 貪欲アルゴリズム
  - 入力 : $M = (E, \boldsymbol{I})$, 重み関数 $w: E \to \mathbb{R}$

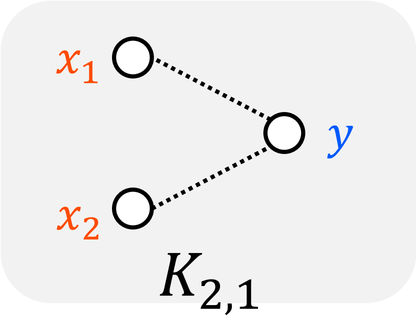
1. $\emptyset \in \boldsymbol{I}$ ∴ 初期解あり(解を出力)
2. $\forall X \in \boldsymbol{I}, Y \subseteq X \Longrightarrow Y \in \boldsymbol{I}$
   ∴ 性質を満たす任意の解に到達可(基を出力)
3. $\forall X, Y \in \boldsymbol{I}, |Y| < |X| \Longrightarrow \exists x \in X \setminus Y, Y \cup \{x\} \in \boldsymbol{I}$
   ∴ 最適解に到達可



独立系の例（独立点集合）

- $M^{\mathrm{ind}}(G) = \left(V(G), \boldsymbol{I}^{\mathrm{ind}}(G)\right)$ ： 独立系（マトロイドではない）
  - $\boldsymbol{I}^{\mathrm{ind}}(G)$ ： Gの独立点集合$S(\subseteq V(G))$の集合
    1. $\emptyset \in \boldsymbol{I}^{\mathrm{ind}}(G)$ ： 空集合は独立点集合
    2. $X \in \boldsymbol{I}^{\mathrm{ind}}(G), Y \subseteq X \Longrightarrow Y \in \boldsymbol{I}^{\mathrm{ind}}(G)$ ： 独立点集合の部分集合は独立点集合
- 性質：互いに隣接しない点の集合（独立点集合）
  - 基 ： 極大な独立点集合
  - サーキット ： 隣接する2点（辺の両端点）
    - ➢ $\exists X, Y \in \boldsymbol{I}^{\mathrm{ind}}(G), |Y| < |X| \Longrightarrow \forall x \in X \setminus Y, Y \cup \{x\} \notin \boldsymbol{I}^{\mathrm{ind}}(G)$

例：$M^{\mathrm{ind}}(K_{2,1}) = \left(V(K_{2,1}), \boldsymbol{I}^{\mathrm{ind}}(G)\right)$



$X = \{x_1, x_2\} \in \boldsymbol{I}^{\mathrm{ind}}(G)$

$Y = \{y\} \in \boldsymbol{I}^{\mathrm{ind}}(G)$

$|Y| = 1 < 2 = |X|$

$\Longrightarrow$

$\{y, x_1\} \notin \boldsymbol{I}^{\mathrm{ind}}(G)$

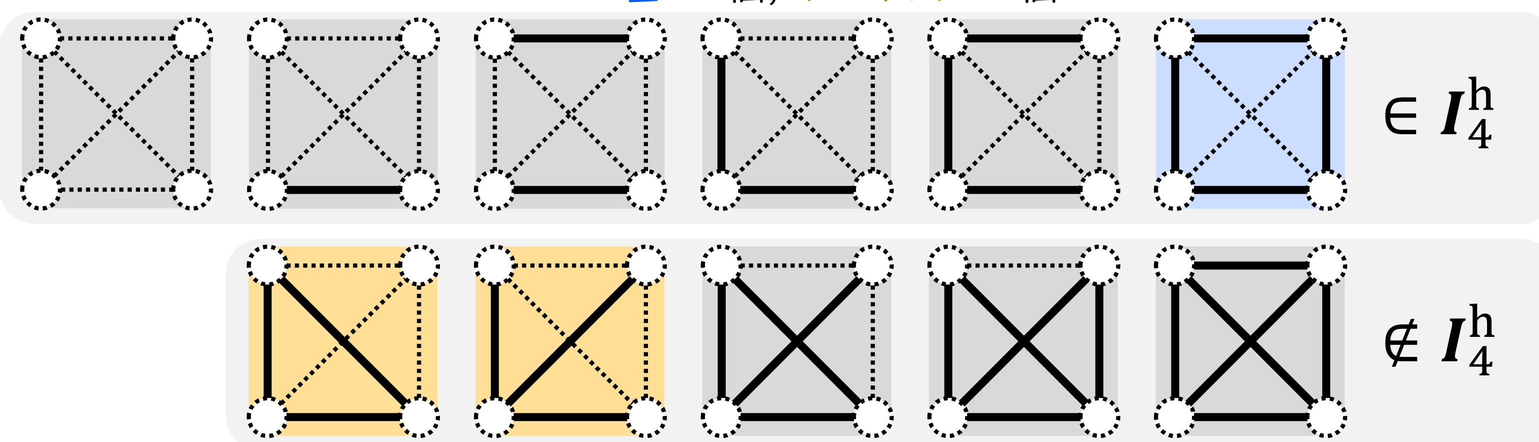
$\{y, x_2\} \notin \boldsymbol{I}^{\mathrm{ind}}(G)$

独立系の例(ハミルトン閉路の部分)

- $M_n^{\mathrm{h}} = \left(E(K_n), \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}\right)$ ： 独立系
  - $\boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}$ ： 辺を追加してハミルトン閉路にできる辺集合$S(\subseteq E(K_n))$の集合
    1. $\emptyset \in \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}$ ： うまく辺を追加すればハミルトン閉路にできる
    2. $X \in \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}, Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}$ ： ハミルトン閉路にできる ⇒ 辺を減らしてもできる
- 性質：ハミルトン閉路の辺集合の部分集合
  - 独立集合 ： 長さ$n-1$以下の閉路なし、次数3以上の点なし
  - 基 ： ハミルトン閉路の辺集合
  - サーキット ： 長さ$n-1$以下の閉路、1点に接続する3辺

例：$M_4^{\mathrm{h}} = \left(E(K_4), \boldsymbol{I}_4^{\mathrm{h}}\right)$

- $\boldsymbol{I}_4^{\mathrm{h}} \subseteq 2^{E(K_4)}$, $\left|2^{E(K_4)}\right| = 2^{|E(K_4)|} = 2^6 = 64$
- 基は3個, サーキットは8個

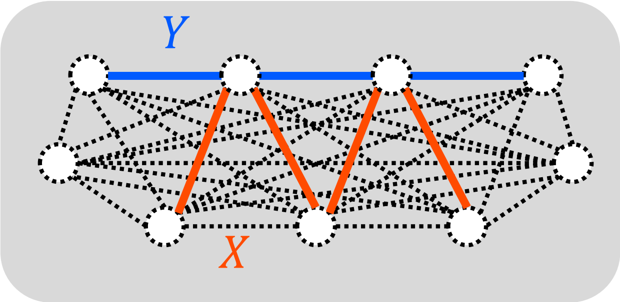


独立系の例(ハミルトン閉路の部分)

- $M_n^{\mathrm{h}} = \left(E(K_n), \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}\right)$ ： マトロイドではない
  - $\boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}$ ： 辺を追加してハミルトン閉路にできる辺集合$S(\subseteq E(K_n))$の集合
    1. $\emptyset \in \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}$ ： うまく辺を追加すればハミルトン閉路にできる
    2. $X \in \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}, Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}$ ： ハミルトン閉路にできる ⇒ 辺を減らしてもできる
- 性質：ハミルトン閉路の辺集合の部分集合
  - 独立集合 ： 長さ$n-1$以下の閉路なし、次数3以上の点なし
    - ➢ $\exists X, Y \in \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}, |Y| < |X| \Longrightarrow \forall x \in X \setminus Y, Y \cup \{x\} \notin \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}$
      - 小さい独立集合を大きくできないことがある

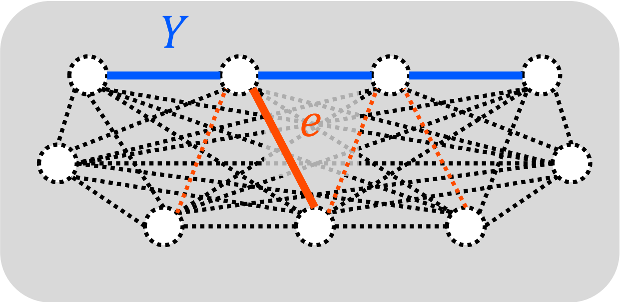
例 ：$M_n^{\mathrm{h}} = \left(E(K_n), \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}\right)$

YにXのどの要素を追加しても従属集合に



$Y \in \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}$ $X \in \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}$

$|Y| = 3 < 4 = |X|$



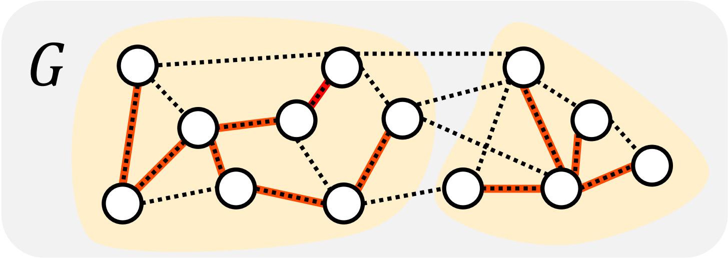
$Y \cup \{e\} \notin \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}$

$e \in X \setminus Y$

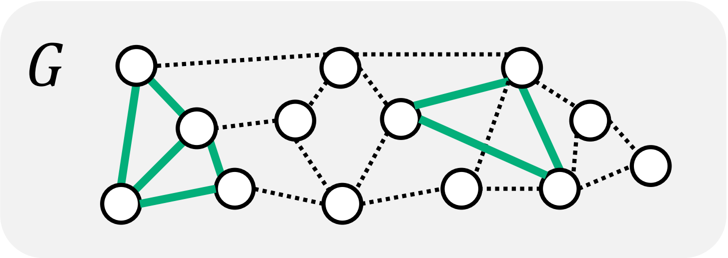
独立系の例(全域森)

- $M(G)=\big(E(G),\mathcal{F}(G)\big)$ ： 独立系
  - $\mathcal{F}(G)$ ： 閉路を含まない辺集合$S(\subseteq E(G))$の集合
    1. $\emptyset\in\mathcal{F}(G)$ ： 閉路を含まない
    2. $X\in\mathcal{F}(G), Y\subseteq X \Longrightarrow Y\in\mathcal{F}(G)$ ： 閉路を含まない ⇒ 辺を減らしても含まない
- 性質：全域森の辺集合(閉路を含まない辺集合)
  - 独立集合 ： 森の辺集合(閉路を含まない辺集合)
  - 基 ： 極大な全域森の辺集合(連結グラフならば全域木の辺集合)
  - サーキット ： 閉路の辺集合

例 ：$M(G)=\big(E(G),\mathcal{F}(G)\big)$



$X\in\mathcal{F}(G)$



$Z\notin\mathcal{F}(G)$

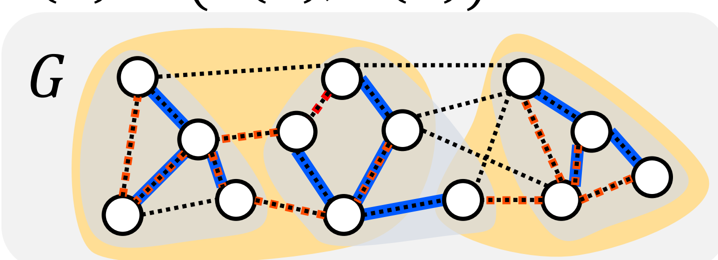
独立系の例(全域森) (グラフ的マトロイド)

- $M(G) = \big(E(G), \mathcal{F}(G)\big)$ ： マトロイド
  - $\mathcal{F}(G)$ ： 閉路を含まない辺集合$S(\subseteq E(G))$の集合
    1. $\emptyset \in \mathcal{F}(G)$ ： 閉路を含まない
    2. $X \in \mathcal{F}(G), Y \subseteq X \Longrightarrow Y \in \mathcal{F}(G)$ ： 閉路を含まない ⇒ 辺を減らしても含まない
    3. $\forall X, Y \in \mathcal{F}(G), |Y| < |X| \Longrightarrow \exists x \in X \setminus Y, Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}(G)$
- 性質：全域森の辺集合(閉路を含まない辺集合)

✓ Yの連結成分数(点数−辺数)はXより多い

⇒ Yの異なる連結成分を接続する辺$e \in X \setminus Y$が存在

例 ：$M(G) = \big(E(G), \mathcal{F}(G)\big)$

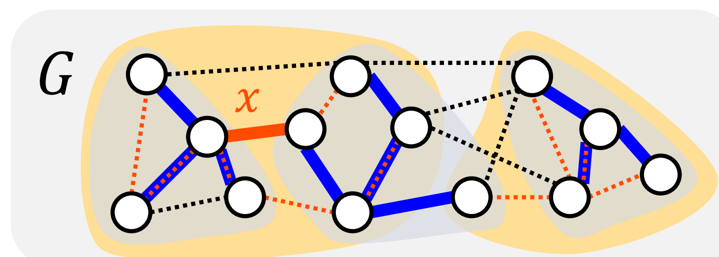


$Y \in \mathcal{F}(G)$　$X \in \mathcal{F}(G)$

$|Y| = 10 < 11 = |X|$

連結成分数 Y ： 3　X ： 2

辺$x \in X \setminus Y$はYの異なる連結成分を接続



$Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}(G)$

$x \in X \setminus Y$

グラフ的マトロイド (graphic matroid)

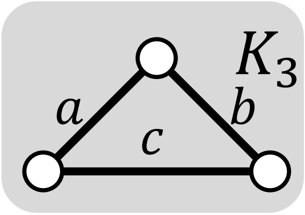
- **定理 (Theorem 4.1)**:
  - 任意のグラフGに対し, $M(G) = \big(E(G), \mathcal{F}(G)\big)$ はマトロイド
    - $\mathcal{F}(G) = \{S \subseteq E(G) | G\langle S\rangle$はGの全域森$\}$
- 証明 :
  - $M(G)$は独立系
    1. $\emptyset \in \mathcal{F}(G)$:閉路を含まない
    2. $X \in \mathcal{F}(G), Y \subseteq X \Longrightarrow Y \in \mathcal{F}(G)$:閉路を含まない⇒辺を減らしても含まない
  - $M(G)$は独立系マトロイド
    3. $\forall X, Y \in \mathcal{F}(G), |Y| < |X| \Longrightarrow \exists x \in X \setminus Y, Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}(G)$
  - Gの全域森F_1, F_2 $\big(E(F_1), E(F_2) \in \mathcal{F}(G)\big)$
    - $|E(F_1)| \geq |E(F_2)|$ならば, F_1の連結成分数はF_2より少ない (定理1.6)
    - F_2の異なる連結成分を接続する辺$e \in E(F_1)$が存在 ⇒ $E(F_2) \cup \{e\} \in \mathcal{F}(G)$ ■

- マトロイド(matroid) $M = (E, \boldsymbol{I})$
  1. $\emptyset \in \boldsymbol{I}$
  2. $\forall X \in \boldsymbol{I}, Y \subseteq X \Longrightarrow Y \in \boldsymbol{I}$
  3. $\forall X, Y \in \boldsymbol{I}, |Y| < |X| \Longrightarrow \exists x \in X \setminus Y, Y \cup \{x\} \in \boldsymbol{I}$

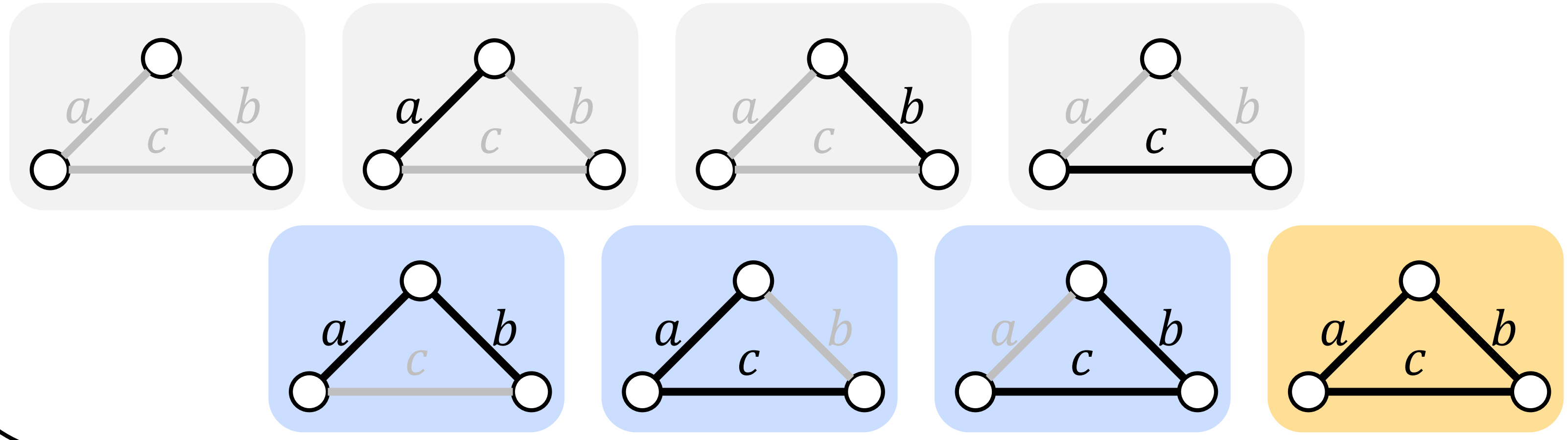
グラフ的マトロイド (graphic matroid)

- $M(G) = \big(E(G), \mathcal{F}(G)\big)$ ： マトロイド
  - $\mathcal{F}(G)$ ： 閉路を含まない辺集合$S(\subseteq E(G))$の集合
- 性質：全域森の辺集合（閉路を含まない辺集合）

例 ：$M(K_3) = \big(E(K_3), \mathcal{F}(K_3)\big)$



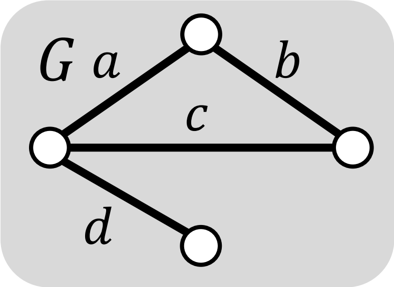
- $E = \{a, b, c\}$
- $\mathcal{F}(K_3) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$
- 基 ： $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$
- サーキット ： $\{a, b, c\}$



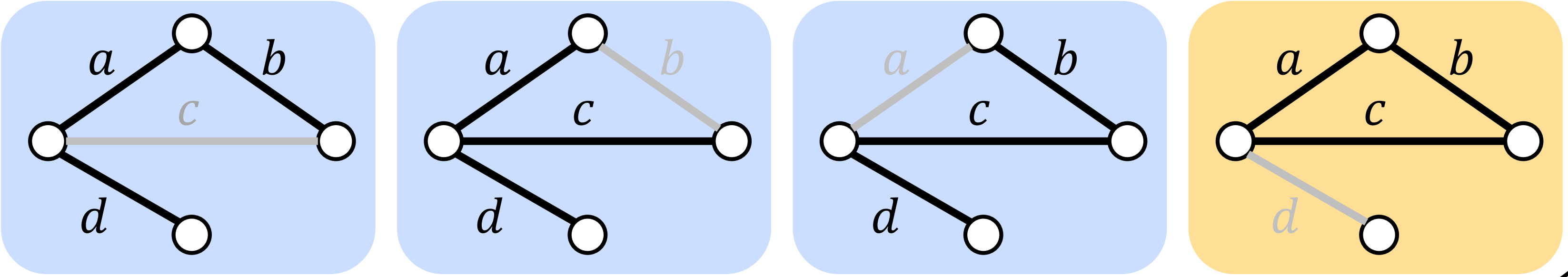
グラフ的マトロイド (graphic matroid)

- $M(G) = \big(E(G), \mathcal{F}(G)\big)$ ： マトロイド
  - $\mathcal{F}(G)$ ： 閉路を含まない辺集合$S(\subseteq E(G))$の集合
- 性質：全域森の辺集合（閉路を含まない辺集合）

例 ：$M(G) = \big(E(G), \mathcal{F}(G)\big)$



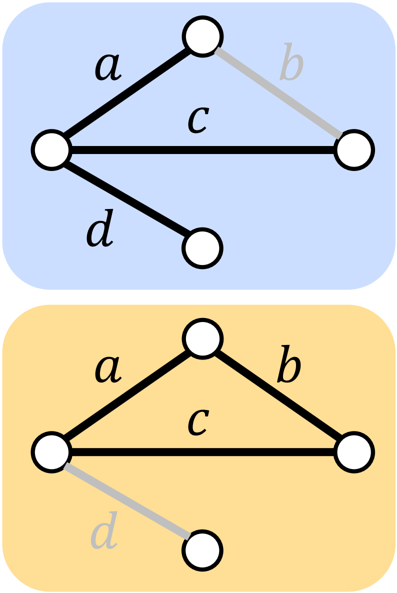
- $E = \{a, b, c, d\}$
- $\mathcal{F}(G) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\big\}$
- 基 ： $\{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$
- サーキット ： $\{a, b, c\}$



グラフ的マトロイド (graphic matroid)

- $M(G) = \left(E(G), \mathcal{F}(G)\right)$ ： マトロイド
  - $\mathcal{F}(G)$ ： 閉路を含まない辺集合$S(\subseteq E(G))$の集合
- 性質：全域森の辺集合(閉路を含まない辺集合)

- グラフGに付随するマトロイド$M(G)$と同型であるマトロイド
  - マトロイド$M(E, \boldsymbol{I})$と $M'(E', \boldsymbol{I}')$は同型
    - 全単射$\phi : E \to E'$ s.t. $X \in \boldsymbol{I} \Leftrightarrow \phi(X) \in \boldsymbol{I}'$が存在

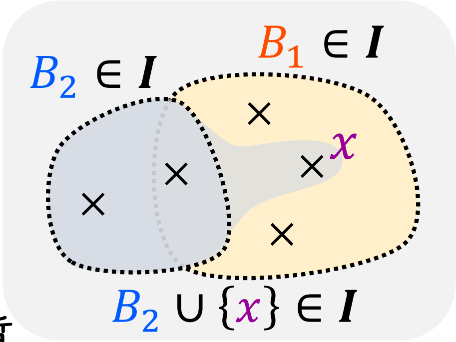


グラフ的マトロイド$M(G)$	連結グラフG
独立集合	森の辺集合
基	全域木の辺集合
従属集合	閉路を含む辺の集合
サーキット	閉路

マトロイドの性質

■ 定理 (Theorem 4.2):
- マトロイド$M=(E,\boldsymbol{I})$ ⇒ 基の要素数は等しい

□ 証明 ： 背理法
- 仮定 ： 基$B_1 \in \boldsymbol{I}$、基$B_2 \in \boldsymbol{I}$、$|B_2| < |B_1|$
  $\Rightarrow\ \exists x \in B_1 \setminus B_2, X = B_2 \cup \{x\} \in \boldsymbol{I}$ ∵マトロイドの性質
- $B_2 \subset X \in \boldsymbol{I}\ \Rightarrow\ B_2$は極大な独立集合(基)であることに反する
  $\Rightarrow\ |B_1| \le |B_2|$
- 同様に$|B_1| \ge |B_2|\ \Rightarrow\ |B_1| = |B_2|$ ■



➢ 任意の全域木の辺数は等しい

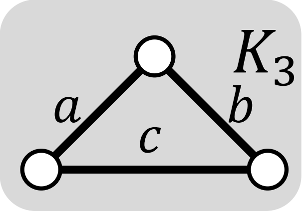
➢ $M(E,\{X|X \subseteq E, |X| \le k\})$はマトロイド (一様マトロイド)
- 独立集合 ： 要素数k以下の集合
- 基 ： 要素数kの集合

■ マトロイド(matroid) $M=(E,\boldsymbol{I})$
1. $\emptyset \in \boldsymbol{I}$
2. $\forall X \in \boldsymbol{I}, Y \subseteq X \Longrightarrow Y \in \boldsymbol{I}$
3. $\forall X, Y \in \boldsymbol{I}, |Y| < |X| \Longrightarrow \exists x \in X \setminus Y, Y \cup \{x\} \in \boldsymbol{I}$

一様マトロイド (uniform matroid)

- $M_{k,|E|}^{\mathrm{uni}} = \left(E, \boldsymbol{I}_{k,|E|}^{\mathrm{uni}}\right)$ ：マトロイド
  - $\boldsymbol{I}_{k,|E|}^{\mathrm{uni}} = \{S \subseteq E \mid |S| \leq k\}$　$(k \in \mathbb{N})$
    1. $\emptyset \in \boldsymbol{I}_{k,|E|}^{\mathrm{uni}}$ ：空集合の要素数はk以下
    2. $X \in \boldsymbol{I}_{k,|E|}^{\mathrm{uni}}, Y \subseteq X \Longrightarrow Y \in \boldsymbol{I}_{k,|E|}^{\mathrm{uni}}$ ：要素数k以下の集合の部分集合の要素数はk以下
    3. $\forall X, Y \in \boldsymbol{I}_{k,|E|}^{\mathrm{uni}}, |Y| < |X| \Longrightarrow \exists x \in X \setminus Y, Y \cup \{x\} \in \boldsymbol{I}_{k,|E|}^{\mathrm{uni}}$
       ：任意の$x \in X \setminus Y$で成立
- 性質：要素数k以下の集合

例：$M_{2,3}^{\mathrm{uni}} = \left(\{a, b, c\}, \boldsymbol{I}_{2,3}^{\mathrm{uni}}\right)$
- $\boldsymbol{I}_{2,3}^{\mathrm{uni}} = \mathcal{F}(K_3) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$
- グラフ的マトロイド

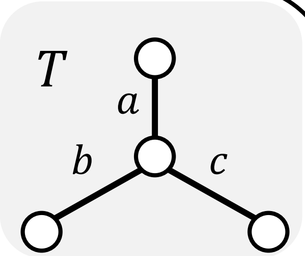


例：$M_{2,4}^{\mathrm{uni}} = \left(\{a, b, c, d\}, \boldsymbol{I}_{2,4}^{\mathrm{uni}}\right)$
- $\boldsymbol{I}_{2,4}^{\mathrm{uni}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$
- グラフ的マトロイドでない

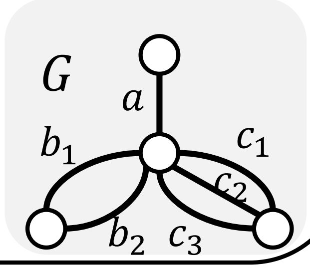
分割マトロイド (partition matroid)

- $M^{\mathrm{par}}(P) = \left(E, \boldsymbol{I}^{\mathrm{par}}(P)\right)$ ： マトロイド
  - $P = (E_1, E_2, \dots, E_k)$ ： Eの分割($k \in \mathbb{N}$)
  - $\boldsymbol{I}^{\mathrm{par}}(P) = \{S \subseteq E \mid |S \cap E_i| \leq 1, 1 \leq i \leq k\}$
    1. $\emptyset \in \boldsymbol{I}^{\mathrm{par}}(P)$ ： 空集合と各分割との共通要素数は0
    2. $X \in \boldsymbol{I}^{\mathrm{par}}(P), Y \subseteq X \Longrightarrow Y \in \boldsymbol{I}^{\mathrm{par}}(P)$ ： 共通要素高々1は部分集合でも成立
    3. $\forall X, Y \in \boldsymbol{I}^{\mathrm{par}}(P), |Y| < |X| \Longrightarrow \exists x \in X \setminus Y, Y \cup \{x\} \in \boldsymbol{I}^{\mathrm{par}}(P)$
       ： $|X \cap E_j| > 0, |Y \cap E_j| = 0$である$j$存在
- 性質：各分割との共通要素は高々1

例：$M^{\mathrm{par}}(P_1) = \left(E, \boldsymbol{I}^{\mathrm{par}}(P_1)\right)$
- $P_1 = (\{a\}, \{b\}, \{c\})$
- $\boldsymbol{I}^{\mathrm{par}}(P_1) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(T) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$



例：$M^{\mathrm{par}}(P_2) = \left(E, \boldsymbol{I}^{\mathrm{par}}(P_2)\right)$
- $P_2 = (\{a\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2, c_3\})$
- $\boldsymbol{I}^{\mathrm{par}}(P_2) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(G) = \{\emptyset, \{a\}, \{b_1\}, \dots, \{c_3\}, \{a, b_1\}, \dots, \{a, b_2, c_3\}\}$



4-2（2）マトロイドと貪欲アルゴリズム

- 貪欲アルゴリズムの性能が発揮される問題の解析
  - 貪欲アルゴリズムが正解を出すための条件は?
    - 最大全域木(Kruskal)は正解を出す
    - 巡回セールスマンは正解を出さない

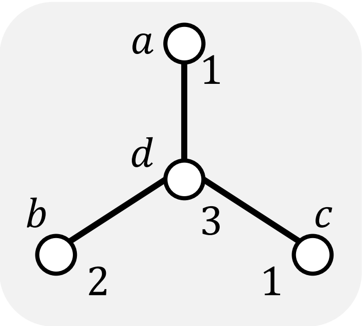
- 貪欲アルゴリズムの構成
  - 空集合を出発点
  - 性質を満たした部分解に,要素を一つずつ追加
    - 性質を満たしたまま
    - 最も評価がよい要素
  - 要素を追加できなくなったら解を出力し終了

最大基問題 (maximum-base problem)

■ 最大基問題

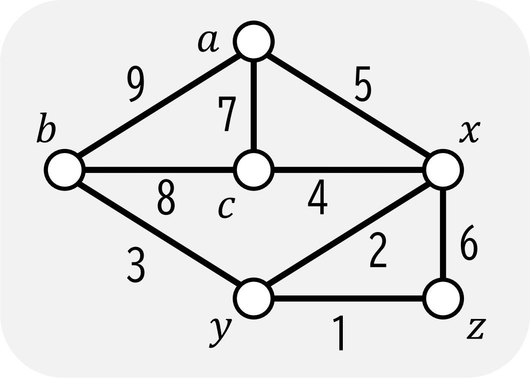
- 入力
  - ➢ 独立系$M = (E, \boldsymbol{I})$，重み関数$w: E \to \mathbb{R}$
- 質問： Mの最大基を一つ示せ

最大基 ： 重み$w(S) = \sum_{e \in S} w(e)$が最大の基



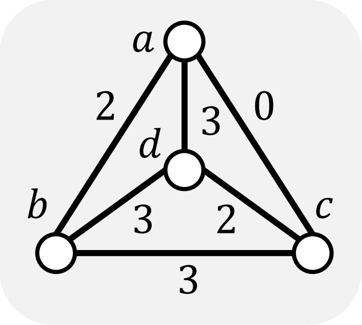
✓ 重み関数が異なれば最大基は異なる

➢ 最大独立点集合問題
- $M^{\mathrm{ind}}(G) = \left(V(G), \boldsymbol{I}^{\mathrm{ind}}\right)$，$w: V(G) \to \mathbb{R}$
  - ■ 点重み和最大の独立点集合を一つ示せ



➢ 最大全域木問題
- $M(G) = (E(G), \mathcal{F}), w: E(G) \to \mathbb{R}$
  - ■ 辺重み和最大の全域木を一つ示せ

➢ 最大巡回セールスマン問題
- $M_n^{\mathrm{h}} = \left(E(K_n), \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}\right), w: E(G) \to \mathbb{R}$
  - ■ ネットワーク$(E(K_n), w)$の最大ハミルトン閉路を一つ示せ



最大基問題 (maximum-base problem)

- **最大基問題**
  - 入力
    - 独立系$M = (E, \mathcal{I})$，重み関数$w: E \to \mathbb{R}$
  - 質問：Mの最大基を一つ示せ

最大基 ： 重み$w(S) = \sum_{e \in S} w(e)$が最大の基

- **Algorithm 4.1 (Greedy)**
  - 入力：独立系$M = (E, \mathcal{I})$，重み関数$w: E \to \mathbb{R}$
  - 出力：Mの基B

$m = |E|$

Step 0: Sort E so that $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \cdots \geq w(e_m)$

Step 1: Set $i := 1$ and $B := \emptyset$

Step 2: If $B \cup \{e_i\} \in \mathcal{I}$, then set $B := B \cup \{e_i\}$

Step 3: If $i = m$, then output B, and halt

Step 4: Set $i := i + 1$ and return to Step 2

最大基アルゴリズム(貪欲アルゴリズム)

■ 貪欲アルゴリズム

入力

➢ 独立系$M = (E, \boldsymbol{I})$, 重み関数 $w: E \to \mathbb{R}$

出力

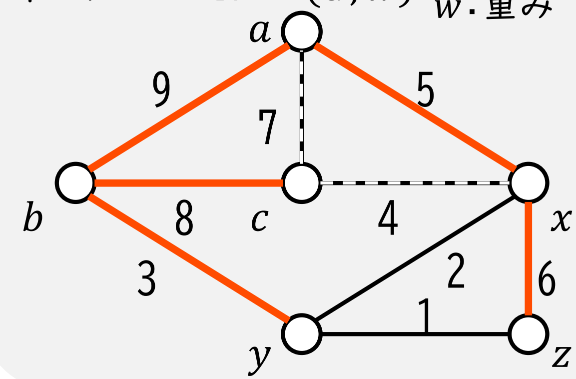
$m = |E|$

➢ Mの基B

0. 初期操作
   - Eを重みの降順に整列(ソーティング)
   - $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \cdots \geq w(e_m)$
1. 初期設定
   - $i \coloneqq 1$, $B \coloneqq \emptyset$
2. 性質判定(独立集合判定)
   - $B \cup \{e_i\} \in \boldsymbol{I} \;\Rightarrow\; B \coloneqq B \cup \{e_i\}$

     $\Rightarrow\; B \coloneqq B \cup \{e_i\}$
3. 終了判定
   - $i = m \;\Longrightarrow\; B$出力し終了
4. 更新
   - $i \coloneqq i + 1$
   - Step 2. へ戻る

ネットワーク$N = (G, w)$ w:重み



$M(G) = (E(G), \mathcal{F})$

辺の追加?

$e_1 = (a, b)$: $B \cup \{e_1\} \in \mathcal{F}$: OK

$e_2 = (b, c)$: $B \cup \{e_2\} \in \mathcal{F}$: OK

$e_3 = (a, c)$: $B \cup \{e_3\} \notin \mathcal{F}$: NG

$e_4 = (x, z)$: $B \cup \{e_4\} \in \mathcal{F}$: OK

$e_5 = (a, x)$: $B \cup \{e_5\} \in \mathcal{F}$: OK

$e_6 = (c, x)$: $B \cup \{e_6\} \notin \mathcal{F}$: NG

$e_7 = (b, y)$: $B \cup \{e_7\} \in \mathcal{F}$: OK

$\mathcal{F}$: 全域森の辺集合の集合

貪欲アルゴリズムの性質

- 定理 (Theorem 4.3):
  - 独立系$M = (E, \boldsymbol{I})$がマトロイド⇔貪欲アルゴリズムは最大基を出力
- 証明
  - 独立系$M = (E, \boldsymbol{I})$がマトロイド⇒貪欲アルゴリズムは最大基を出力
  - アルゴリズムの出力$B = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$
    - $w(b_1) \geq w(b_2) \geq \cdots \geq w(b_r)$
  - ✓「出力Bは最大基ではない」と仮定
  - 最大基$X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$
    - $w(x_1) \geq w(x_2) \geq \cdots \geq w(x_r)$
  - 仮定より$w(X) > w(B) \Rightarrow \ \exists k, w(x_k) > w(b_k)$
    - $B_{k-1} = \{b_1, b_2, \dots, b_{k-1}\} \in \boldsymbol{I}$
    - $X_k = \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k\} \in \boldsymbol{I}$
    - $\exists x_i \in X_k \setminus B_{k-1}$, $B_{k-1} \cup \{x_i\} \in \boldsymbol{I}$ ∵マトロイドの性質
      - $w(x_i) \geq w(x_k) > w(b_k)$
  - $x_i \notin B_{k-1} \ \Rightarrow$ アルゴリズムはB_{k-1}にb_kの前にx_iを追加するはず ⇒ 矛盾
  - 「出力Bは最大基」

基の要素数は等しい
$|B| = |X|$

$$
\begin{array}{llllll}
B: & w(b_1), & \dots, & w(b_{k-1}), & w(b_k), \dots, & w(b_r) \\
 & \text{IV} & \text{IV} & \text{IV} & \wedge & \\
X: & w(x_1), & \dots, & w(x_{k-1}), & w(x_k), \dots &
\end{array}
$$

貪欲アルゴリズムの性質

- 定理 (Theorem 4.3):
  - 独立系$M=(E,\mathcal{I})$がマトロイド⇔貪欲アルゴリズムは最大基を出力
- 証明 (cont.)
  - 独立系$M=(E,\mathcal{I})$がマトロイドでない
    ⇒ 貪欲アルゴリズムが最大基を出力しない重み関数wあり
  - $\exists X,Y\in\mathcal{I},\ |Y|<|X| \Longrightarrow \forall x\in X\setminus Y, Y\cup\{x\}\notin\mathcal{I}$
  - 重み関数 : $w(e)=\begin{cases}1+\epsilon & e\in Y\\ 1 & e\in X\setminus Y\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$

$0<\epsilon<1/|Y|$

貪欲アルゴリズムはYの要素をまず選ぶ

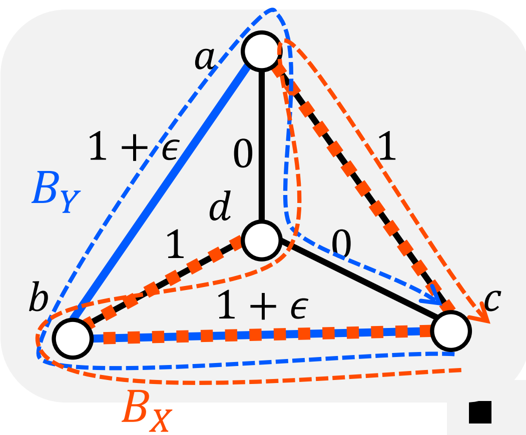
Xの要素を加えると独立集合ではなくなる
⇒ 重み1の要素は選べない

  - 貪欲アルゴリズムの出力 Y' : $Y\subseteq Y'$, $Y'\cap X=\emptyset$
    - $w(Y')=w(Y)=|Y|(1+\epsilon)<|Y|+1<|X|\le w(X)$
  - 出力Y'は最大基ではない ■

貪欲アルゴリズムの性質

- $M_n^{\mathrm{h}} = (E(K_n), \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}})$ ： 独立系 （マトロイドではない）
  - $\boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}$ ： 辺を追加してハミルトン閉路にできる辺集合$S(\subseteq E(K_n))$の集合
- 性質：ハミルトン閉路の辺集合の部分集合

例 ：$M_4^{\mathrm{h}} = (E(K_4), \boldsymbol{I}_4^{\mathrm{h}})$



$$w(e) = \begin{cases} 1+\epsilon & e \in Y \\ 1 & e \in X \setminus Y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$Y \in \boldsymbol{I}_4^{\mathrm{h}} \quad X \in \boldsymbol{I}_4^{\mathrm{h}}$

$|Y| = 2 < 3 = |X|$

$\forall x \in X \setminus Y, Y \cup \{x\} \notin \boldsymbol{I}_4^{\mathrm{h}}$

$w(B_Y) = 2 + 2\epsilon < w(B_X) = 3 + \epsilon$

- マトロイド(matroid) $M = (E, \boldsymbol{I})$
  1. $\emptyset \in \boldsymbol{I}$
  2. $\forall X \in \boldsymbol{I}, Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \boldsymbol{I}$
  3. $\forall X, Y \in \boldsymbol{I}, |Y| < |X| \Rightarrow \exists x \in X \setminus Y, Y \cup \{x\} \in \boldsymbol{I}$

貪欲アルゴリズムの性質

- 定理：マトロイドの要素の重みがすべて異なる ⇒ 最大基は一意的
- 証明
  - マトロイド$M = (E, \boldsymbol{I})$, 重み関数, $w: E \to \mathbb{R}$
  - 貪欲アルゴリズムの出力$B = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$
    - $w(b_1) > w(b_2) > \cdots > w(b_r)$
  - ✓ 貪欲アルゴリズムの出力は一意的
  - 定理(Theorem4.3)より貪欲アルゴリズムは最大基を出力
  - Bと異なる最大基Xが存在と仮定
    - $w(X) = w(B)$
    - $w(x_1) > w(x_2) > \cdots > w(x_r)$
  - $\exists k, w(x_k) > w(b_k)$
    - $B_{k-1} = \{b_1, b_2, \dots, b_{k-1}\} \in \boldsymbol{I}$
    - $X_k = \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k\} \in \boldsymbol{I}$
    - $\exists x_i \in X_k \setminus B_{k-1}, B_{k-1} \cup \{x_i\} \in \boldsymbol{I}$
      - $w(x_i) > w(x_k) > w(b_k)$
  - 貪欲アルゴリズムはB_{k-1}にx_iを追加するはずで矛盾
  - ✓ 最大基は一意的 ■