



Tokyo Tech

離散構造とアルゴリズム

ICT.M215

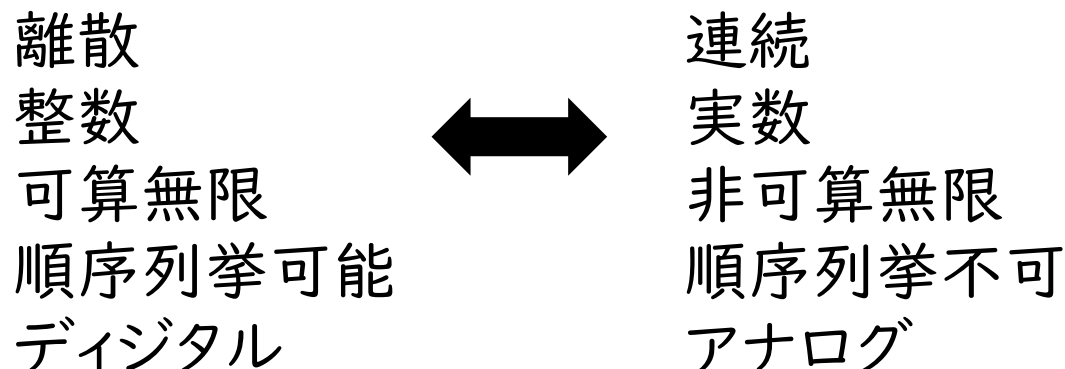
高橋篤司

東京工業大学 工学院 情報通信系

教科書：情報とアルゴリズム（上野・高橋 森北出版）

離散構造

■ 離散とは？



■ 離散集合 S ： 可算集合

■ 離散構造： 離散集合の要素間に関係 R が定義

関係 R ： $R \subseteq S \times S$ （直積の部分集合）

アルゴリズム

■ アルゴリズム

- 実行可能な処理の適用順序（問題を解くための）

■ 問題：答えを要求する

- 組合せ問題：離散構造で言及される問題
- 連続関数を対象とする問題
 - 精度の概念を導入し離散化すれば、離散構造上の問題となる

教科書

■ 情報とアルゴリズム

- 上野修一, 高橋篤司

- 森北出版

1. グラフ

2. アルゴリズムの解析

3. グラフのアルゴリズム

4. アルゴリズムの設計

グラフ $G = (V, E)$

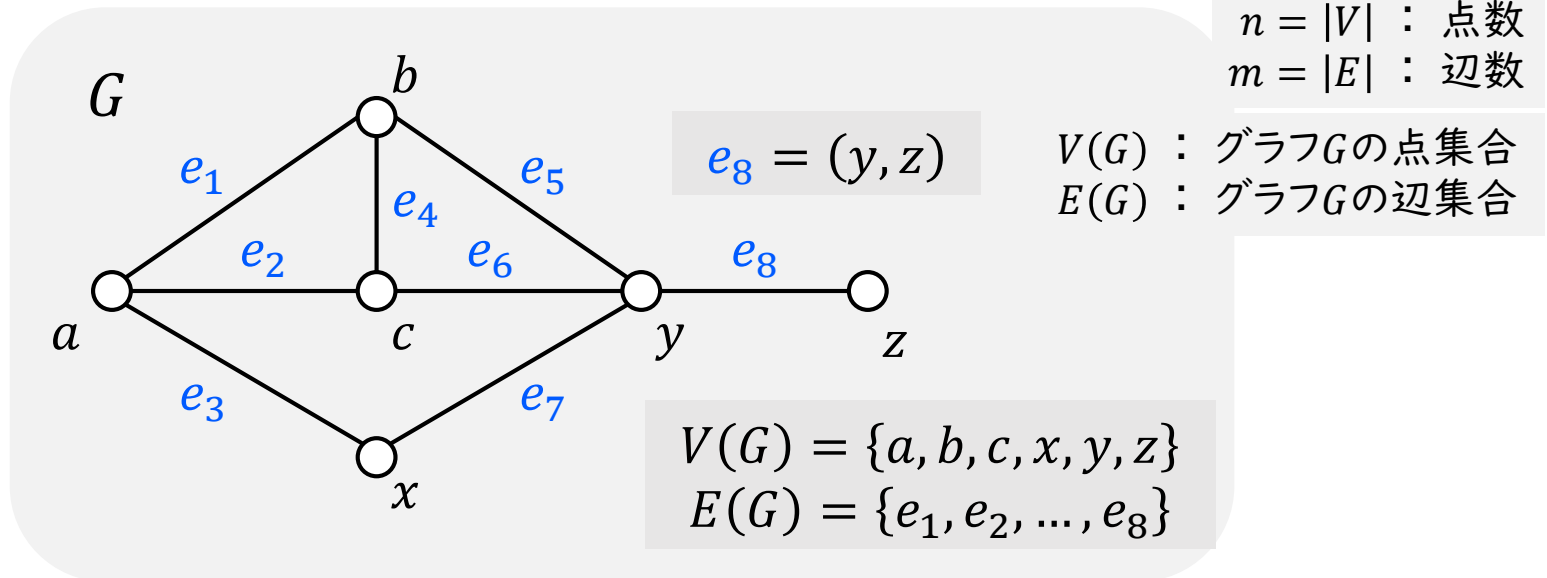
■ 離散構造を表現する手段

- グラフ(graph): $G = (V, E)$

■ V : 点集合 (vertex set)

- 基本的には有限集合

■ E : 辺集合 (edge set) ($E \subseteq V \times V$)



様々なグラフ

■ 離散構造を表現する手段

- グラフ(graph): $G = (V, E)$

■ V : 点集合 (vertex set)

- 基本的には有限集合

■ E : 辺集合 (edge set) ($E \subseteq V \times V$)

- 有向辺: $(u, v) \neq (v, u) \Rightarrow$ 有向グラフ



- 無向辺: $(u, v) = (v, u) \Rightarrow$ 無向グラフ

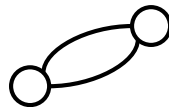


➤ (自己)ループ: 反射律に対応

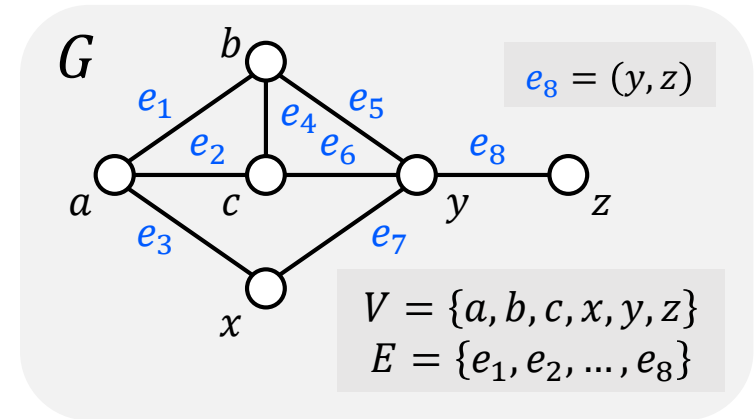


(v, v)

➤ 並列辺: 重複集合



$\{(u, v), (u, v)\} \neq \{(u, v)\}$



$n = |V|$: 点数
 $m = |E|$: 辺数

$V(G)$: グラフGの点集合
 $E(G)$: グラフGの辺集合

✓ 単純グラフ: ループ, 並列辺を持たないグラフ

情報基礎学 (5類, 2018年度まで開講)

■ 教科書: 情報基礎数学

- 佐藤泰介・高橋篤司・伊東利哉・上野修一

- オーム社

1. 集合

2. 写像

3. 関係

4. 無限

5. 論理

6. 数え上げ

7. 定義と証明

8. 木構造とアルゴリズム

集合 (確認)

■ 集合 $\{ \}$

➤ 要素の集まり

- 外延的定義: 要素を列挙 (順序に意味なし)

◆ $\{a, b, c\}$

◆ $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$

- 内包的定義: 条件を書き並べる

◆ $\{n | n \in \mathbb{N}, n \text{ は } 2 \text{ の倍数}\}$

◆ $\{n \in \mathbb{N} | n \text{ は } 2 \text{ の倍数}\}$

区間

➤ $[a, b] = \{r \in \mathbb{R} | a \leq r \leq b\}$

➤ $(a, b) = \{r \in \mathbb{R} | a < r < b\}$

■ 組 $()$

➤ 順序がつけられている成分の集まり

◆ (y, m, d)

◆ 2つ組 (順序対) (x, y)

$$\{a, b, c\} = \{a, c, b\} \neq (a, c, b) \neq (a, b, c)$$

集合演算 (確認)

■ 積 (共通部分) ($\cap$)

➤ $A \cap B = \{c | c \in A, c \in B\}$

◆ $\{1,2\} \cap \{1,b,c\} = \{1\}$

■ 和 ($\cup$)

➤ $A \cup B = \{c | c \in A \text{ または } c \in B\}$

◆ $\{1,2\} \cup \{1,b,c\} = \{1,2,b,c\} = \{1,1,2,b,c\}$

■ 差 ($\setminus$)

➤ $A \setminus B = \{c | c \in A, c \notin B\}$

◆ $\{1,2\} \setminus \{1,b,c\} = \{2\}$

■ 補 ($\overline{}$)

➤ $\overline{A} = \{c \in U | c \notin A\}$ (U : 全体集合)

■ 直積 ($\times$)

➤ $A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$

◆ $\{1,2\} \times \{1,b,c\} = \{(1,1), (1,b), (1,c), (2,1), (2,b), (2,c)\}$

■ 直和 ($+$)

➤ $A + B = \{(a,0) | a \in A\} \cup \{(b,1) | b \in B\}$ ($0,1$: 任意のラベル)

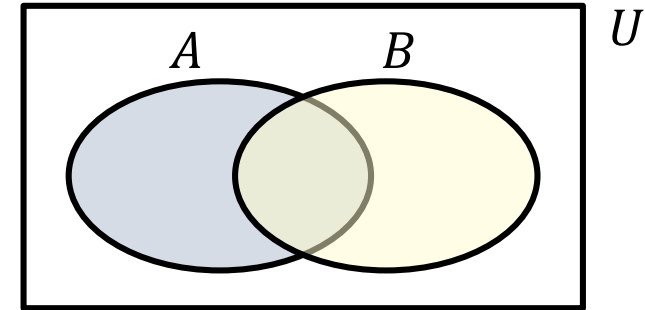
◆ $\{1,2\} + \{1,b,c\} = \{(1,0), (2,0), (1,1), (b,1), (c,1)\}$

■ べき

- すべての部分集合 ($\subseteq$) からなる集合

➤ $2^A = \{B | B \subseteq A\}$

◆ $2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$



■ $|A|$: A の要素数, 濃度

- $|\{1,2,b,c\}| = |\{1,1,2,b,c\}| = 4$

■ 有限集合

- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

- $|A + B| = |A| + |B|$

- $|2^A| = 2^{|A|}$

■ B は A の部分集合

- $B \subseteq A$

- $\forall b \in B, b \in A$

集合の性質 (確認)

- $\forall A, \emptyset \subseteq A$
- $\forall A, A \subseteq A$
- $A = B \iff A \subseteq B, B \subseteq A$

■ 交換則

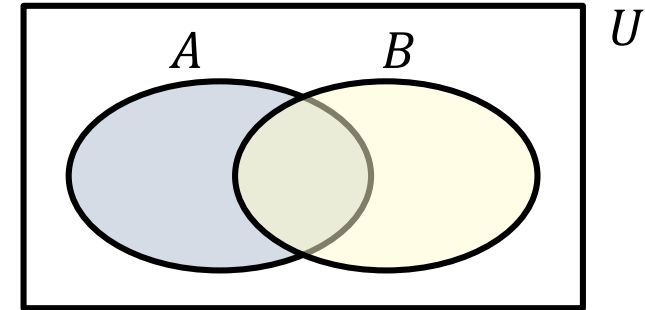
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

■ 結合則

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup B \cap C$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap B \cup C$

■ ド・モルガン

- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



代表的な集合 (確認)

- $\emptyset = \{\}$: 空集合 (empty set)
 - $|\emptyset| = 0$
- $\mathbb{N}$: 自然数 (natural numbers) $\{0, 1, 2, \dots\}$
 - $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ (アレフ・ゼロ)
- $\mathbb{Z}$: 整数 (integers) $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$: 有理数 (rational numbers)
- $\mathbb{R}$: 実数 (real numbers)