2019/07/16
Kotaro Yamada
kotaro@math.titech.ac.jp

Info. Sheet 5; Advanced Topics in Geometry B1 （MTH.B406）

Informations

- 次回 7 月 23 日が最終となります．授業評価アンケートにご協力お願いいたします．
  Next week (July 23) will be the final lecture of this course. Please cooperate in a questionaire on couse survey.

Corrections

- Info. Sheeet 4, page 2, line 4: 曲率テンソルの士気 ⇒ 曲率テンソルの式
- Lect. Note, page 38, line 12: $(V;\boldsymbol{v}) \Rightarrow (V;\boldsymbol{x})$
- Lect. Note, page 38, 3 lines from the bottom:

$$X = \sum_{j=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial u^i} = \qquad \Rightarrow \qquad X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial u^i} =$$

- Lect. Note, page 39, line 11: $\tilde{g}_{ab} \Rightarrow \tilde{g}^{ab}$
- Lect. Note, page 39, 3–4 lines from the bottom:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ab} &:= g\left(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b}\right) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial x^a}{\partial u^i}\frac{\partial x^b}{\partial u^j} g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial x^a}{\partial u^i}\frac{\partial x^b}{\partial u^j} g_{ij}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned}\tilde{g}_{ab} &:= g\left(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b}\right) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial u^i}{\partial x^a}\frac{\partial u^j}{\partial x^b} g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial u^i}{\partial x^a}\frac{\partial u^j}{\partial x^b} g_{ij}\end{aligned}$$

- Lect. Note, page 40, 2 lines from the bottom: $(\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^m) \Rightarrow (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$
- Lect. Note, page 44, 10–9 lines from the bottom: $T \Rightarrow W$ (2 times)
- Lect. Note, page 44, equation (4.12):

$$\sum_{l=1}^{m} \Gamma_{jk}^{m} Y^l \qquad \Rightarrow \sum_{l=1}^{m} \Gamma_{lk}^{j} Y^l$$

- Lect. Note, page 44, line 6: $X = \sum_{i=1}^{m} X^i(\partial/\partial u^i) \Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{m} Y^i(\partial/\partial u^i)$
- Lect. Note, page 45, line 7: bi-linear ⇒ bilinear
- Lect. Note, page 45, equation (4.16): $\nabla_X fY = Xf + f\nabla_X Y \Rightarrow \nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$
- Lect. Note, page 45, equation (4.18): $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(X, \nabla_Y Z) \Rightarrow Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$
- Lect. Note, page 45, equations (4.17) and (4.18): Remove a comma from each line.

- Lect. Note, page 46, 6 lines from the bottom: (??) $\Rightarrow$ (4.19)
- Lect. Note, page 46, 4 lines from the bottom: Add the equation number (4.19a)
- Lect. Note, page 46, 2 lines from the bottom: (??) $\Rightarrow$ (4.19a)
- Lect. Note, page 47, line 2: $\displaystyle\sum_{l=1}^{n} \Rightarrow \sum_{l=1}^{m}$

Students' comments

- 前回内容の復習がちょっと時間かかりすぎかもしれません.

  Lecturer's Comment: そうかもしれませんね.

- 計算で手がとまっていまうので，練習の必要性を感じました.

  Lecturer's Comment: 練習，っていのはやり過ぎかもしれませんが，セミナーのテキストを読んでいるときなどに，自分で計算してみる習慣をつけるとよいと思います.

- 今回の講義で warped product metric の話題が出てきたときに，Peter Peterson の Riemannian Geometry に doubly worped product の話題がかかれていることを思い出しました.

  Lecturer's Comment: なるほど.

- まさに微分幾何をしているようでワクワクします.

  Lecturer's Comment: こちらははらはら.

- 先週出してなくてすみませんでした.

  Lecturer's Comment: いいえ.

Q and A

Q 1: Prop. 4.9 と同じ性質をもつ bilinear $\nabla\colon \mathfrak{X}^\infty(M)\times\mathfrak{X}^\infty(M)\to\mathfrak{X}^\infty(M)$ さえ得られれば，Prop. 4.10 の式のように曲率テンソルのようなものを定義できると思うのですが，これを考えることに意味はありますか.

A: あります，というかそれがリーマン幾何の教科書の通常の道．実は Prop. 4.9 を満たす ∇ は唯一に決まってしまうので，そちらから入り座標での表現を後で考えるのが一般的です．この講義では「曲率は可積分条件」という主張を先に持ってきたかったのであえて順番を変えています.

Q 2: 2 つのリーマン多様体 (M_1, g_1), (M_2, g_2) が与えられたときに $g_1 + g_2$ はリーマン計量になっているのでしょうか.

A: どの多様体上のリーマン計量でしょうか.

Q 3: かなり荒い表現ですが，"フロベニウスの定理が成り立つ" $\Leftrightarrow$ "当該多様体は局所的に flat" $\Leftrightarrow$ "当該多様体の曲率テンソルは局所的に 0" ということで良いのでしょうか.

A: いいえ.「フロベニウスの定理」は「可積分条件を満たせば解がある」という微分方程式の性質ですから，多様体の条件とは関係ありません．最初は「方程式 (3.13) が可積分条件を満たす」．2 番目以降の「局所的に」は不要.

Q 4: 問題の計算が迷走しました.

A: そうですか.