Info. Sheet 4; Advanced Topics in Geometry B1 (MTH.B406)

Corrections

- Info. Sheet 3, page 2, Q2: 不連続家 $\Rightarrow$ 不連続か
- Lect. Note, page 25, line 13: The such $\Rightarrow$ **Such**
- Lect. Note, page 25, 5 lines from the bottom; page 26, line 3: $\iota M \rightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow \iota: M \rightarrow \mathbb{R}^n$
- Lect. Note, page 26, Example 3.3: **Remove** (In fact, this is the same as Example 3.2).
- Lect. Note, page 26, 7 lines from the bottom: $P \Rightarrow P \in M$.
- Lect. Note, page 27, line 1: $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_s^{n+1} \Rightarrow \mathbf{v} \in \mathbb{R}_1^{n+1}$
- Lect. Note, page 27, bottom of Example 3.5: In this case, the restriction $\Rightarrow$ In this case, the restriction of $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on $T_P M$ is a (non-degenerate) inner product of $T_P M$.
- Lect. Note, page 28, line 5: (5.2) $\Rightarrow$ (3.1)
- Lect. Note, page 29, line 2: $(i, j = 1, \dots, m) \Rightarrow i, j = 1, \dots, m$ (Remove parentheses).
- Lect. Note, page 29, line 6: $P \Rightarrow P \in M$.
- Lect. Note, page 29, line 2:

$$g_{ij} := \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad g_{ij} := g \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right)$$

- Lect. Note, page 31, 2 lines from the bottom:

$$\sum_{k=1}^m \delta_l^p \quad \Rightarrow \quad \sum_{p=1}^m \delta_l^p.$$

- Lect. Note, page 31, bottom:

$$\sum_{l=1}^m g_{kl} \Gamma_{ij}^k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^m g_{kl} \Gamma_{ij}^k$$

- Lect. Note, page 32, equation (3.12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} - \sum_{p=1}^m \left(\Gamma_{ij}^p \Gamma_{pk}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{pj}^l \right) &= 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} + \sum_{p=1}^m \left(\Gamma_{ij}^p \Gamma_{pk}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{pj}^l \right) &= 0 \end{aligned}$$

- Lect. Note, page 33, 8 lines from the bottom: $(m, m - s) \Rightarrow (s, m - s)$
- Lect. Note, page 33, 4 lines from the bottom: $m - s \Rightarrow (m - s)$
- Lect. Note, page 33, 2 lines from the bottom: diagonalized an $\Rightarrow$ diagonalized **by** an
- Lect. Note, page 34, line 12:

$$\sum_{k=1}^m \mathbf{f}_j \, du^j \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^m \mathbf{f}_j \, du^j$$

Students' comments

- 学部の線形代数や解析が実は理解できていなかったと思い知らされるが増えてきました。

Lecturer's Comment: よくある話です。

- 曲率テンソルの土気が可積分条件の式とピンときて、かなり気持ち良かったです。

Lecturer's Comment: でしょ。

- 曲率テンソル = 0 が可積分条件であるというのはよく納得できました。

Lecturer's Comment: よかった。

- 最近は何の分野も添え字が多くて大変です。全く覚えられません。

Lecturer's Comment: 必要なのは「慣れ」ですかね。

- この前の微分幾何学の集中講義とこの講義に参加することで、以前よりも Christoffel 記号の扱い方に慣れてきた様な気がします。

Lecturer's Comment: なんと大変ですよ。

Q and A

Q 1: 計量を考えるに至った経緯はあるのでしょうか (多様体を $\mathbb{R}^n$ の open set であり合わせるのと同じ雰囲気?)

A: むしろ「計量を取り去った、ただの多様体」の概念の方が後のような気がします。もともとの起こりがユークリッド空間の曲面 (と思われる) で、そこには最初から計量が入っています。その計量を「みないこと」にして、純粋に多様体の概念を考えるにはかなりの抽象化が必要だと思います。

Q 2: 計量 g_{ij} を定めれば Γ_{ij}^k は自然に定まりますが、 Γ_{ij}^k を定めた時に、計量 g_{ij} が一位に定まるのでしょうか?

A: いいえ。たとえば $\mathbb{R}^n$ (ユークリッド空間) と $\mathbb{R}_s^n$ (擬ユークリッド空間) はことなる計量を持っていますが、どちらも (標準座標に関する) クリストッフエル記号が恒等的に零です。

Q 3: 講義ノート 28 ページ, 下 3 行, $T_P M$ の canonical basis $\{\partial/\partial u^j\}_P$ を “in the abstract way” で $\{\partial f/\partial u^j(P)\}$ と同一視すると言っていますが、具体的にはどういうことでしょうか。

A: 多様体上に抽象的に定義されたベクトル $\partial/\partial u^j$ を、その df による像 $\partial f/\partial u^j$ と同一視する。写像 f ははめ込みなので、 df が単射になることから同一視ができています。