

第 5 章 弾性論入門

2.1 節で述べたように、転位が存在すると結晶の自由エネルギーは増加する。この増加分の主要な寄与は弾性ひずみエネルギーである。転位の近傍の結晶格子は完全結晶に比べて歪んでいる。この章では、ひずみや応力、そして弾性ひずみエネルギーを評価するための線形弾性論（フックの法則）の基礎知識を学ぶ。しかし、この講義の受講者の多くにとっては、すでに学んだ内容と思うので、復習のつもりである。

5.1 ひずみと応力

当分の間、結晶を忘れて、物体を連続体固体と考える。簡単のために、図 5.1 のように (x_1, x_2) 2次元座標系を考える。変形前一辺の長さが 1 であった正方形の物体が変形後、(a) 長方形、(b) 平行四辺形になったとする。そして、変形前の正方形物体内の任意の位置ベクトル \mathbf{x} で記述された点に変形後に $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$ の点に移動したとする。このベクトル \mathbf{u} を変位 (displacement) とよぶ。もし \mathbf{u} が物体内のどの部分でも同一であ

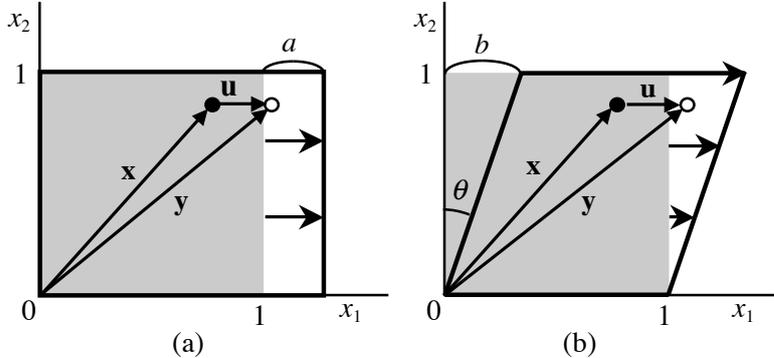


図 5.1 (a) 垂直ひずみ $\epsilon_{11} = a$
 (b) せん断ひずみ $\epsilon_{12} = b/2$ または $\gamma_{12} = b$
 変形が小さいときは $b = \tan\theta \approx \theta$

るなら、この物体は単に平行移動を起こしたにすぎず、正味の変形は何も起こっていない。したがって、物体が変形したということは、 \mathbf{u} が場所によって変わったこと、すなわち \mathbf{u} の座標成分に対する微分のうち、少なくとも 1 つがゼロではないということである。そこで、以下のように変形勾配 (distortion) β_{ij} (i, j は 2次元では 1 または 2 をとり、3次元では 1, 2 または 3 をとる) を定義する。

$$\beta_{ij} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (5.1)$$

変形勾配には 2次元では 4 個、3次元では 9 個の独立成分があり、 β_{ij} を (i, j) 成分とする 2×2 または 3×3 正方行列を構成する。

ひずみ (strain) は変形勾配行列の対称成分として定義される。すなわち、

$$\epsilon_{ij} (= \epsilon_{ji}) \equiv \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{2} \quad (5.2)$$

β_{ij} , ϵ_{ij} は共に無次元量である。このようにひずみは i, j について対称なので、独立なひずみの成分は 2次元では 3 個、3次元では 6 個となる。

ひずみ行列の対角成分 ($i = j$ のひずみ) を垂直ひずみ (normal strain), 非対角成分 ($i \neq j$ のひずみ) をせん断ひずみ (shear strain) とよぶ。垂直ひずみのうち、引張ひずみ (tensile strain) は正、圧縮ひずみ (compressive strain) は負の符号を持つ。図 5.1 でわかるように、垂直ひずみとは伸びた長さを元の長さで割ったものであり、せん断ひずみとは、ひずみの絶対値が 1 に比べて小さいときは、図 5.1(b) の角度 θ の半分となる。せん断ひずみに対しては、工学せん断ひずみとして、

$$\gamma_{ij} \equiv \beta_{ij} + \beta_{ji} \quad (i \neq j) \quad (5.3)$$

を用いることもある (式(5.2)の γ はそれである)。この定義では、図 5.1(b) の γ_{12} は変形が小さいとき角度 θ そのものになる。

一般の行列に対して成り立つ性質として、その対角成分の和（トレース，trace）は座標系の取り方によらない不変量であることが挙げられる。すなわち，

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} : \text{不変量} \quad (5.4)$$

一方，図 5.1 (b)でもわかるようにせん断ひずみによっては物体の体積は変わらないので，変形前に体積 V であった物体の変形後の体積 $V + \Delta V$ は，変形が小さいときは

$$V + \Delta V = V(1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})(1 + \varepsilon_{33}) \approx V(1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

と書ける。したがって，微小変形の場合は次の近似式が成り立つ。

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \Delta V / V \quad (5.5)$$

このようにひずみ行列のトレースは変形前後の物体の体積変化率という意味を持つ。これが座標系の取り方によらないことは物理的に考えても当然であろう。

次に応力を考えよう。応力の一般的な定義は

$$\text{応力} \equiv (\text{ある面に作用する力}) / (\text{その面の断面積}) \quad (5.6)$$

であり，単位面積あたりの力として圧力と同様にパスカル Pa (= N/m²) という単位を持つ。図 5.2 は応力成分を示してある。 σ_{ij} の添字 i は応力の方向を意味し， j は応力の作用している面の法線方向を意味する。図 5.2 でわかるように，せん断応力 σ_{12} ， σ_{21} は図の正方形の要素に偶力を生じさせる。偶力が釣り合わないと，この要素は回転してしまう。回転は要素の変形には無関係なので，正味の変形を考えるときは偶力が釣り合っていないと都合が悪い。そこで，応力も

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (5.7)$$

という対称性が成り立ち，独立な応力の成分は 2 次元では 3 個，3 次元では 6 個となる。ひずみ行列と同様に，応力行列の対角成分 ($i = j$) を垂直応力 (normal stress)，非対角成分 ($i \neq j$) をせん断応力 (shear stress) とよぶ。垂直応力のうち，引張応力 (tensile stress) は正，圧縮応力 (compressive stress) は負の符号を持つ。

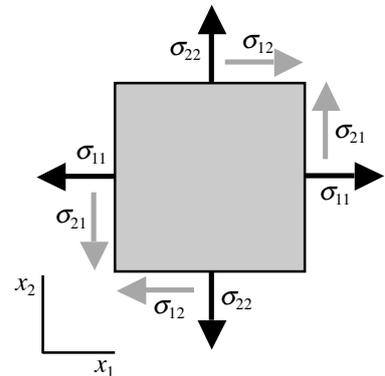


図 5.2 応力成分

5.2 線形弾性体とフックの法則

一般に応力が作用すると物体は変形する。応力が小さいときは物体の変形は弾性変形 (elastic deformation) と考えて良く，応力を除去すれば物体は元の形に戻る。このような弾性変形を示す最も簡単な物体は線形弾性体 (linear elastic body) とよばれ，フックの法則 (Hooke's law) を満たす。たとえば，コイルばねの伸び x とばねを伸ばすために要する力 F の間には比例関係 (フックの法則) $F = Kx$ (K はばね定数) が成り立つ。3次元の物体の弾性変形の表現は 1次元のばねの弾性伸びよりは複雑になるが，物体が線形弾性体ならば，物体を弾性変形させるために要する応力 σ_{ij} と弾性ひずみ (塑性ひずみなどと区別するため，このクラスでは e_{ij} と書くことにする) の間には次式の一般化されたフックの法則が成り立つ。

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} e_{kl} \quad (5.8)$$

ここで， C_{ijkl} は応力と弾性ひずみを結びつける比例定数で弾性定数 (elastic constant) または弾性ステイフネス (elastic stiffness) とよばれる。

弾性定数 C_{ijkl} には一見 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ 個の異なるものが存在するように思えるが，応力とひずみが

対称テンソルであることより常に $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$ が成り立つ。また、次節から $C_{ijkl} = C_{klij}$ も成り立つこともわかる。その結果、独立な弾性定数は最大でも 21 個しかないことになる。これでもうんざりするほど多い数であるが、結晶固体のように対称性を持つ場合はさらにその数が激減し、たとえば fcc (面心立方晶) や bcc (体心立方晶) のような立方晶の場合にはわずかに 3 個の独立な弾性定数があるのみである。

本講義では、最も対称性の高い等方体 (isotropic body) を考えれば十分である。その場合には、独立な弾性定数はたったの 2 個となるので安心していただきたい。それらを λ と μ (合わせてラーメ定数 (Lame's constant とよばれる) と表せば次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} C_{1111} &= C_{2222} = C_{3333} = \lambda + 2\mu \\ C_{1122} &= C_{2233} = C_{3311} = \lambda \\ C_{1212} &= C_{2323} = C_{3131} = \mu \end{aligned} \quad (5.9)$$

ラーメ定数を用いて、等方体のフックの法則を陽に表せば、

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11kl} e_{kl} = C_{1111} e_{11} + C_{1122} e_{22} + C_{1133} e_{33} \\ &= (\lambda + 2\mu) e_{11} + \lambda (e_{22} + e_{33}) \\ \sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu) e_{22} + \lambda (e_{33} + e_{11}) \\ \sigma_{33} &= (\lambda + 2\mu) e_{33} + \lambda (e_{11} + e_{22}) \\ \sigma_{12} &= C_{12kl} e_{kl} = C_{1212} e_{12} + C_{1221} e_{21} = 2\mu e_{12} \\ \sigma_{23} &= 2\mu e_{23} \\ \sigma_{31} &= 2\mu e_{31} \end{aligned} \quad (5.10)$$

となる。ここでは応力とひずみは対称 ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) であることを使っている。

ラーメ定数のうちの μ は剛性率 (shear modulus または rigidity) ともよばれ、 G という記号で表されることもある。ラーメ定数以外にもヤング率 (Young's modulus) E , ポアソン比 (Poisson's ratio) ν , 体積弾性率 (bulk modulus) κ などが等方体のフックの法則を表すのによく用いられる。外部応力として σ_{11} のみの単軸応力を付加したとき、ヤング率とポアソン比は

$$E \equiv \sigma_{11} / e_{11} \quad (5.11)$$

$$\nu \equiv -e_{22} / e_{11} (\equiv -e_{33} / e_{11}) \quad (5.12)$$

で定義され、静水圧 $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_H$ (他の σ_{ij} はゼロ) を付加したとき体積弾性率は

$$\kappa \equiv \sigma_H / (e_{11} + e_{22} + e_{33}) \quad (5.13)$$

で定義される。この中でポアソン比 ν のみは無次元量で、多くの物体で 0.3 程度の値を持つ。

等方体の独立な弾性定数は 2 個しかないから、これらの諸量の間には関係式が存在する。たとえば、(5.10) 式で $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$, また、設定の対称性から $e_{22} = e_{33}$ と置けば、(5.11), (5.12) の定義より

$$E = 2\mu(1 + \nu), \quad \nu = \lambda / \{2(\lambda + \mu)\} \quad (5.14)$$

などが得られる。

5.3 弾性ひずみエネルギー

上で考えたコイルばねに蓄えられる弾性エネルギー (弾性ひずみエネルギー, elastic strain energy) E_s は、

$$E_s = (1/2)Kx^2 = (1/2)Fx \quad (5.15)$$

と表される。内部応力状態にある物体の弾性ひずみエネルギーも、ばねと同様にひずみの 2 次形式で表される。ただし物体の場合の弾性ひずみエネルギーは物体の体積に比例する量なので、単位体積あたりの弾性ひずみエネルギー (または「弾性 (ひずみ) エネルギー密度」, elastic (strain) energy

density) E_0 で表すと次式のようになる.

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sigma_{kl} e_{kl} \quad (5.16)$$

この式の第2辺の総和記号の後は $C_{klij} e_{ij} e_{kl}$ と書いても同じことなので, 先に述べたように $C_{ijkl} = C_{klij}$ が成り立つことがわかる.

等方体のフックの法則を使って, (5.16)を陽に表すと次式のようになる.

$$E_0 = (\lambda/2)(e_{11} + e_{22} + e_{33})^2 + \mu(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + (\mu/2)(e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2) \quad (5.17)$$

一般に応力やひずみは物体中の場所によって変わるので, 体積 V の物体に蓄えられる弾性ひずみエネルギー E_{el} は, (5.17)を物体全体にわたって体積積分することにより得られる. すなわち,

$$E_{el} = \iiint_V E_0 dx_1 dx_2 dx_3 \quad (5.18)$$

である.

第2回練習問題

問題 2.1 問題1.4でも言ったことであるが, fcc やbccなどの立方晶の結晶では, (hkl) 面と $[hkl]$ 方向は互いに垂直である. このこととベクトルの内積計算法を利用して, fcc 金属単結晶を $[213]$ 方向から引っ張るとき, $(1\bar{1}1)[011]$ すべり系に対するシュミット因子を求めよ.

問題 2.2 転位の絵やバーガス回路をいろいろ描いて, (a) 転位は決して結晶内部に端点を持たないこと, および(b) どのような回路を選んでもバーガスベクトルは一義的に決まること, を理解せよ.

問題 2.3 転位密度は塑性変形によって増加することが知られており, 焼鈍された結晶では $\rho = 10^{10} \text{ m}^{-2}$ 程度, 強加工を加えた結晶では $\rho = 10^{15} \text{ m}^{-2}$ 程度の値をとる. それぞれの転位密度に対して, 角砂糖程度の大きさ (簡単のために 1 cm^3 としよう) の結晶中に含まれる転位の全長を求めよ.

問題 2.4 刃状転位のみからなる転位ループは存在するが, らせん転位のみからなる転位ループは存在しないことを説明せよ.

問題 2.5 (5.8), (5.9)式から(5.10)式を導け.

問題 2.6 (5.14)式を導け.

問題 2.7 (5.17)式を導け.