中性子輸送理論　第 7 回（多群拡散理論）
講義ノート

東京工業大学　小原　徹

6.　多群拡散理論

6.1　エネルギー依存拡散理論からの多群方程式の導出

エネルギー依存拡散方程式

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \phi}{\partial t}-\nabla D\nabla\phi+\Sigma_t\phi(\mathbf{r},E,t)=\int_0^\infty dE'\Sigma_S(E'\to E)\phi(\mathbf{r},E',t)$$
$$+\chi(E)\int_0^\infty dE'\nu\Sigma_f(E')\phi(\mathbf{r},E',t)$$
$$+S_{ext}(\mathbf{r},E,t) \qquad \cdots(1)$$

$\chi(E)$：核分裂スペクトル

S_{ext}：外部中性子源

中性子のエネルギーを離散化して，ある間隔ごとのエネルギー群としてあつかう。ここでは中性子のエネルギー範囲を G 個エネルギー群に分ける。

(1)式を g 群のエネルギー幅$E_g<E<E_{g-1}$で積分する。

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{E_g}^{E_{g-1}}dE\frac{1}{v}\phi-\nabla\cdot\int_{E_g}^{E_{g-1}}dED\nabla\phi+\int_{E_g}^{E_{g-1}}dE\Sigma_t\phi$$
$$=\int_{E_g}^{E_{g-1}}dE\int_0^\infty dE'\Sigma_s(E'\to E)\phi(\mathbf{r},E',t)+\int_{E_g}^{E_{g-1}}dES \qquad \cdots(2)$$

ここで，いくつかの形式的な定義を行う。

g 群の中性子束　　$\phi_g(\mathbf{r},t)\equiv\int_{E_g}^{E_{g-1}}dE\phi(\mathbf{r},E,t)$ $\cdots(3)$

g 群の全断面積　　$\Sigma_{tg}\equiv\frac{1}{\phi_g}\int_{E_g}^{E_{g-1}}dE\Sigma_t(E)\phi(\mathbf{r},E,t)$ $\cdots(4)$

g 群の中性子の速さ　　$\frac{1}{v_g}\equiv\frac{1}{\phi_g}\int_{E_g}^{E_{g-1}}dE\frac{1}{v}\phi(\mathbf{r},E,t)$ $\cdots(5)$

散乱項と E'についての積分を離散化すると，

$$\int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \int_0^{\infty} dE' \, \Sigma_S(E' \to E) \phi(\mathbf{r}, E', t)$$

$$= \sum_{g'=1}^{G} \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \int_{E_{g'}}^{E_{g'-1}} dE' \Sigma_S(E' \to E) \phi(\mathbf{r}, E', t) \qquad \cdots (6)$$

となる。ここで，G は全エネルギー群数。

これより群移動断面積を次のように定義する。

$$\Sigma_{sg',g} \equiv \frac{1}{\phi_{g'}} \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \int_{E_{g'}}^{E_{g'-1}} dE' \Sigma_S(E' \to E) \phi(\mathbf{r}, E', t) \qquad \cdots (7)$$

また，核分裂中性子源項を次のように書く。

$$\int_{E_g}^{E_{g-1}} dE S_f(\mathbf{r}, E, t) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \chi(E) \left[\sum_{g'=1}^{G} \int_{E_{g'}}^{E_{g'-1}} dE' \nu(E') \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E', t) \right] \qquad \cdots (8)$$

となる。これより g'群の核分裂断面積を次のように定義する。

$$\nu_{g'} \Sigma_{fg'} \equiv \frac{1}{\phi_{g'}} \int_{E_{g'}}^{E_{g'-1}} dE' \nu(E') \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E', t) \qquad \cdots (9)$$

となる。また

$$\chi_g \equiv \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \chi(E) \qquad \cdots (10)$$

と定義する。

エネルギー依存のフィックの法則

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E) = -D(E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E) \qquad \cdots (11)$$

が成り立つと仮定するならば，g 群の中性子流は(11)式を g 群で積分することで得られる。すなわち

$$\mathbf{J}_g(\mathbf{r}) = -D_g \nabla \phi_g(\mathbf{r}) \qquad \cdots (12)$$

ここで，D_gは次式で定義される。

$$D_g \equiv \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} dE D(E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E)}{\nabla \phi_g(\mathbf{r})} \qquad \cdots (13)$$

これらの定義を用いて(1)式を書き換えると多群拡散方程式が得られる。

$$\frac{1}{v_g}\frac{\partial \phi_g}{\partial t} - \nabla D_g \nabla \phi_g + \Sigma_{tg}\phi_g(\mathbf{r},t)$$

$$= \sum_{g'=1}^{G} \Sigma_{sg',g}\phi_{g'} + \chi_g \sum_{g'=1}^{G} \nu_{g'}\Sigma_{fg'}\ \phi_{g'} + S_g \qquad \cdots(14)$$

ここで，v_g，D_g，Σ_{tg}，$\Sigma_{sg',g}$，χ_g，ν_g，Σ_{fg}，S_gを群定数と呼ぶ。

6.2　2 群拡散理論

高速中性子を第 1 群（高速群），熱中性子を第 2 群（熱群）としてあつかう。

熱群の上限は，熱群から高速群への上方散乱（散乱による中性子のエネルギーの増加）が無視できるような十分高いところを選ぶ。（通常～1eV）

各群の中性子束

高速群　$\phi_1(\mathbf{r},t) = \int_{E_1}^{E_0} dE\,\phi(\mathbf{r},E,t) \equiv$ 高速中性子束

$\cdots(15)$

熱群　$\phi_2(\mathbf{r},t) = \int_{E_2}^{E_1} dE\,\phi(\mathbf{r},E,t) \equiv$ 熱中性子束

E_0：高速群の上限（10～20MeV）

E_1：高速群と熱群の境界（～1eV）

E_2：熱群の下限（～0eV）

核分裂中性子はすべて高速群で生まれるため

$$\chi_1 = \int_{E_1}^{E_0} dE\chi(E) = 1, \qquad \chi_2 = \int_{E_2}^{E_1} dE\chi(E) = 0 \qquad \cdots(16)$$

$\chi(E)$：核分裂スペクトル

よって核分裂による中性子源S_{f1}，S_{f2}は，

$S_{f1} = \nu_1\Sigma_{f1}\phi_1 + \nu_2\Sigma_{f2}\phi_2$（高速群）

$\cdots(17)$

$S_{f2} = 0$（熱群）

ここで，除去断面積Σ_{Rg}を次のように定義する。

$$\Sigma_{Rg} \equiv \Sigma_{tg} - \Sigma_{sg,g} \qquad \cdots(18)$$

熱群からの上方散乱は存在しないため，

$$\int_{E_2}^{E_1} dE\Sigma_s(E' \to E) = \Sigma_s(E'), \qquad E_2 \le E' \le E_1 \qquad \cdots(19)$$

よって

$$\Sigma_{s2,2} = \frac{1}{\phi_2}\int_{E_2}^{E_1} dE \int_{E_2}^{E_1} dE'\Sigma_s(E' \to E)\phi(\mathbf{r}, E')$$
$$= \frac{1}{\phi_2}\int_{E_2}^{E_1} dE'\,\Sigma_s(E')\phi(\mathbf{r}, E') = \Sigma_{s2} \qquad \cdots(20)$$

従って熱群に対する除去断面積Σ_{R2}は

$$\Sigma_{R2} = \Sigma_{t2} - \Sigma_{s22} = \Sigma_{t2} - \Sigma_{s2} = \Sigma_{a2} \qquad \cdots(21)$$

他の群定数は前節で定義した通り。群定数は，対象となる群に対する詳細スペクトル計算を行い，断面積データをこのスペクトルで平均することで得られる。((3)式～(13)式参照)

以上の群定数を用いると臨界原子炉の 2 群拡散方程式は次のようになる。

$$-\nabla D_1\nabla\phi_1 + \Sigma_{R1}\phi_1 = \nu_1\Sigma_{f1}\phi_1 + \nu_2\Sigma_{f2}\phi_2$$
$$-\nabla D_2\nabla\phi_2 + \Sigma_{a2}\phi_2 = \Sigma_{s12}\phi_1 \qquad \cdots(22)$$

6.3　修正 1 群拡散理論

熱中性子のもれが無視できる場合

すなわち

$$\frac{-D_2\nabla^2\phi_2}{\Sigma_{a2}\phi_2} = \frac{D_2B^2}{\Sigma_{a2}} = {L_2}^2B^2 \ll 1 \qquad \cdots(23)$$

の場合（例，大型軽水炉）

(22)式より

$$\phi_2(\mathbf{r}) = \frac{\Sigma_{s12}}{\Sigma_{a2}}\phi_1(\mathbf{r}) \qquad \cdots(24)$$

よって次式が得られる。

（修正 1 群モデル）