# 中性子輸送理論　第 5 回（原子炉の 1 群拡散理論(1)）
講義ノート

東京工業大学　小原　徹

## 5.　原子炉の 1 群拡散理論

### 5.1　時間依存の平板原子炉

(a)拡散方程式の解

断面積$\Sigma_a, \Sigma_{tr}, \Sigma_f$を持つ核燃料物質で出来た一様の平板の原子炉

1 群拡散方程式

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\phi}{\partial t} - D\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \Sigma_a\phi(x,t) = \nu\Sigma_f\phi(x,t) \quad \cdots(1)$$

初期条件

$$\phi(x,0) = \phi_0(x) = \phi_0(-x) \quad \text{（対称）} \quad \cdots(2)$$

境界条件

$$\phi\left(\frac{\tilde{a}}{2},t\right) = \phi\left(-\frac{\tilde{a}}{2},t\right) = 0 \quad \cdots(3)$$

解を次の形に仮定する（変数分離）

$$\phi(x,t) = \psi(x)T(t) \quad \cdots(4)$$

(4)式を(1)式に代入して,両辺を$\psi(x)T(t)$で割ると

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{v}{\psi}\left[D\frac{d^2\psi}{dt^2} + (\nu\Sigma_f - \Sigma_a)\psi(x)\right] \equiv -\lambda \text{（定数）} \quad \cdots(5)$$

よって

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda T(t) \quad \cdots(6)$$

$$D\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\nu\Sigma_f - \Sigma_a)\psi(x) = -\frac{\lambda}{v}\psi(x) \quad \cdots(7)$$

時間依存の式(6)の解

$$T(t) = T(0)e^{-\lambda t} \quad \cdots(8)$$

空間依存の式

$$D\frac{d^2\psi}{dx^2}+\left(\frac{\lambda}{v}+\nu\Sigma_f-\Sigma_a\right)\psi(x)=0 \qquad \cdots(9)$$

$$境界条件：\psi\left(\frac{\tilde{a}}{2}\right)=\psi\left(-\frac{\tilde{a}}{2}\right)=0 \qquad \cdots(10)$$

λは未定の定数である。

次の固有値問題を考える。

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+{B_m}^2\psi_n(x)=0 \qquad \cdots(11)$$

$$\psi_n\left(\frac{\tilde{a}}{2}\right)=\psi_n\left(-\frac{\tilde{a}}{2}\right)=0$$

(2)式の初期条件から,対称性の成り立つ解にのみ注目すると,

固有関数

$$\psi_n(x)=\cos B_n x$$

固有値

$${B_n}^2=\left(\frac{n\pi}{\tilde{a}}\right)^2,\quad n=1,3,5,\cdots \qquad \cdots(12)$$

(9)式を(11)式と同じ固有値問題と考えると，λは次のようになる。

$$\lambda=v\Sigma_a+vD{B_n}^2-v\nu\Sigma_f\equiv\lambda_n,\quad n=1,3,5 \qquad \cdots(13)$$

$\lambda_n$：時間固有値

よって(1)式の一般解は,

$$\phi(x,t)=\sum_{\substack{n\\ 奇数}}A_n\exp(-\lambda_n t)\cos\frac{n\pi x}{\tilde{a}} \qquad \cdots(14)$$

(14)式は境界条件(3)式を満たしている。

初期条件(2)式から,

$$\phi(x,0)=\phi_0(x)=\sum_{\substack{n\\ 奇数}}A_n\cos\frac{n\pi x}{\tilde{a}} \qquad \cdots(15)$$

直交性から,

$$A_n = \frac{2}{\tilde{a}}\int_{-\frac{\tilde{a}}{2}}^{\frac{\tilde{a}}{2}} dx\phi_0(x)\cos\frac{n\pi x}{\tilde{a}} \qquad \cdots(16)$$

よって

$$\phi(x,t) = \sum_{\substack{n \\ 奇数}} \left[\frac{2}{\tilde{a}}\int_{-\frac{\tilde{a}}{2}}^{\frac{a}{2}} dx'\phi_0(x')\cos B_n x'\right] \exp(-\lambda_n t)\cos B_n x \qquad \cdots(17)$$

このとき時間固有値

$$\lambda_n = v\Sigma_a + vDB_n{}^2 - v\nu\Sigma_f, \quad B_n = \frac{n\pi}{\tilde{a}} \qquad \cdots(18)$$

(b)長時間経過後の振る舞い

(12)式から

$$B_1{}^2 < B_3{}^2 < \cdots < B_n{}^2 = \left(\frac{n\pi}{\tilde{a}}\right)^2 \qquad \cdots(19)$$

よって(18)式から

$$\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_5 \cdots \qquad \cdots(20)$$

すなわち(17)式で大きな n に対応するモード（項）は時間と共に急速に減少する。

$t \to \infty$のとき

$$\phi(x,t) \sim A_1 \exp(-\lambda, t)\cos B_1 x \qquad \cdots(21)$$

（基本モード）

初期値の形$\phi_0(x)$に関わりなく,十分時間が経つと中性子束は基本モードの形になる。

ここで,

$$B_1{}^2 = \left(\frac{\pi}{\tilde{a}}\right)^2 \equiv B_g{}^2 \equiv 幾何学的バックリング \qquad \cdots(22)$$

$$\left[\begin{array}{l} 意味 \qquad モードの曲率の測定 \\ B_n{}^2 = -\frac{1}{\psi_n}\frac{d^2\psi_n}{dx^2} \quad ((11)式より) \end{array}\right]$$

(c)臨界条件

中性子束分布が原子炉内で時間に依存しない条件。すなわち,核分裂連鎖反応を定常的に行わせる条件。

この状態を原子炉の臨界と定義

臨界 ≡ 時間に依存しない中性子束が,原子炉内で維持される状態
（核分裂以外の中性子源は存在しないで）

中性子束の一般解

$$\phi(x,t) = A_1 \exp(-\lambda_1 t)\cos B_1 x + \sum_{\substack{n=3 \\ n,\text{奇数}}}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n t)\cos B_n x \qquad \cdots(23)$$

中性子束が時間に依存しないとき,最低次の時間固有値は 0 になる。

$$\lambda_1 = 0 = v(\Sigma_a - \nu\Sigma_f) + vDB_1{}^2 \qquad \cdots(24)$$

高次モード（n=3,5,⋯）は$-\lambda_n$が負なので,時間と共に減衰する。したがって,

$$\phi(x,t) \to A_1 \cos B_1 \neq \text{時間の関数}$$

(24)式の$B_1{}^2$を$B_g{}^2$でおきかえると

$$B_m{}^2 = B_g{}^2 \qquad \text{臨界条件} \qquad \cdots(25)$$

$$\text{ここで,}\ B_m{}^2 \equiv \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D} \qquad \text{材料バックリング} \qquad \cdots(26)$$

原子炉を臨界にするには寸法（$B_g{}^2$）かまたは炉心構成（$B_m{}^2$）を調整して,$B_m{}^2 = B_g{}^2$を達成すればよい。

ここで,

$$B_m{}^2 > B_g{}^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{超臨界}$$

$$B_m{}^2 = B_g{}^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{臨界}$$

$$B_m{}^2 < B_g{}^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{未臨界}$$

の関係が成り立つ。

$$B_g{}^2 = \left(\frac{\pi}{\tilde{a}}\right)^2$$

$$B_m{}^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

$$t \to \infty \qquad \phi(x,t) \to A_1 \exp(-\lambda_1 t) \cdot \cos B_g x$$