# 中性子輸送理論　第4回（1群拡散理論）
# 講義ノート

東京工業大学　小原　徹

## 4.　1群拡散方程式
### 4.1　拡散方程式の導出

中性子密度 $N(\mathbf{r},t)$（または中性子束$\phi(\mathbf{r},t)$）によって原子炉内の中性子束分布を表わす。

原子炉内のどこかに表面Sの任意の体積Vを考える。

時刻tでのV内の中性子数

$$\int_V d^3r N(\mathbf{r},t) = \int_V d^3r \frac{1}{v}\phi(\mathbf{r},t) \qquad \cdots(1)$$

V内の中性子数の変化率

$$\frac{d}{dt}\left[\int_V d^3r \frac{1}{v}\phi(\mathbf{r},t)\right] = \int_V d^3r \frac{1}{v}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$=(\text{V内での発生})-(\text{V内での吸収})-(\text{V内からのもれ}) \qquad \cdots(2)$$

$$\text{V内での発生}=\int_V d^3r S(\mathbf{r},t) \qquad \cdots(3)$$

$S(\mathbf{r},t)$：中性子源密度

$$\text{V内での吸収}=\int_V d^3r \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r},t) \qquad \cdots(4)$$

$$\text{V内からのもれの総数}=\int_S d\mathbf{S}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r},t) \qquad \cdots(5)$$

ガウスの定理を用いて(5)式の表面積分を体積積分に変えると

$$\int_S d\mathbf{S}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r},t)=\int_V d^3r\nabla\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r},t) \qquad \cdots(6)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r},t)=\mathrm{div}\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$$

⑵式へこれらの式を代入すると，

$$\int_V d^3r\left[\frac{1}{v}\frac{\partial\phi}{\partial t} - S + \Sigma_a\phi + \nabla\cdot\mathbf{J}\right] = 0 \qquad \cdots(7)$$

⑺式はあらゆる体積 V に対して成立しなければならないので，以下の式が得られる。

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\phi}{\partial t} - S + \Sigma_a\phi + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0 \qquad \cdots(8)$$

この式は$\phi(\mathbf{r},t)$，$\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$の 2 つの未知数を含んでいる。$\phi(\mathbf{r},t)$，$\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$の間には正確な関係はない。

拡散近似

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) \cong -D(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r},t) \qquad \cdots(9)$$

ここで

$D(\mathbf{r})$：拡散係数

であり，

$$D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}} = \frac{1}{3(\Sigma_t - \bar{\mu}_0\Sigma_s)} \qquad \cdots(10)$$

$\bar{\mu}_0$：中性子散乱衝突の散乱核の平均余弦

⑼式を⑻式に代入すると，

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \nabla\cdot D(r)\nabla\phi(\mathbf{r}) - \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r},t) + S(\mathbf{r},t) \qquad \cdots(11)$$

を得る。（1 群中性子拡散方程式）

D と$\Sigma_a$が位置に依存しない場合（均質の場合）

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\phi}{\partial t} - D\nabla^2\phi + \Sigma_a\phi(\mathbf{r},t) = S(\mathbf{r},t) \qquad \cdots(12)$$

中性子束が時間の関数でないとき（定常状態）

$$-D\nabla^2\phi + \Sigma_a\phi(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}) \qquad \cdots(13)$$

(13)式を$-D$で割ると

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{L^2}\phi(\mathbf{r}) = -\frac{S(\mathbf{r})}{D} \qquad \cdots(14)$$

ここで $L \equiv \sqrt{\dfrac{D}{\Sigma_a}}$　（中性子拡散距離）

L：中性子が吸収される前に発生源からどのくらい離れるかの目安

〔重要〕

- 拡散近似が妥当となる条件

① 境界や孤立した中性子源から平均自由行程の数倍程度離れている
② 媒質が弱い吸収体である
③ 中性子流は，中性子−原子核反応の平均時間に比べてゆっくり変化している

4.2　初期条件と境界条件

(1)初期条件

すべての位置 $\mathbf{r}$ において，時刻 $t=0$ の中性子束で与える。すなわち，全ての $\mathbf{r}$ において

$$\phi(\mathbf{r},0) = \phi_0(\mathbf{r})$$

とする。

(2)境界条件

(a)真空境界

例　原子炉の外側の境界

いかなる中性子も外側からこの表面を通って中へ入ってこない。
拡散理論が有効である原子炉の内部で正確な中性子束を与える境界条件

$$\phi(\tilde{x}_s) = 0$$

$\tilde{x}_s = x_s + z_0$　（補外境界）

$x_s$：真空境界の位置

$z_0 = 0.7104\lambda_{tr}$　（補外距離または外挿距離）

ただし

$$\lambda_{tr} = \frac{1}{\Sigma_{tr}}$$

(b)物質の境界での境界条件

① 　中性子束$\phi$が境界面で連続

及び

② 　境界面を横切る中性子流 $\mathbf{J}$ の垂直成分が連続

(c)常に成り立つべき条件

$0 \leq \phi(\mathbf{r}, t) < \infty$ 　（特異的に局在化した中性子源付近を除く）

4.3　非増倍体系での中性子の拡散

例　均質な媒質中に無限に広い平面中性子源がある場合の中性子束$\phi(x)$

拡散方程式

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{1}{L^2}\phi(x) = 0, \qquad x > 0$$

境界条件

(a) $\lim_{x \to 0^+} -D\frac{d\phi}{dx} = \frac{S_0}{2}$ 　　$S_0$：中性子源強度$[\mathrm{cm}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{-1}]$

(b) $\lim_{x \to \infty} \phi(x) < \infty$

一般解

$$\phi(x) = A\exp\left(-\frac{x}{L}\right) + B\exp\left(\frac{x}{L}\right)$$

(b)から，B＝0

(a)から，$\lim_{x \to 0} -D\left(-\frac{A}{L}\exp\left(-\frac{x}{L}\right)\right) = \frac{AD}{L} = \frac{S_0}{2}$

$$\therefore \ A = \frac{S_0 L}{2D}$$

$$\therefore \ \phi(x) = \frac{S_0 L}{2D}\exp\left(-\frac{x}{L}\right), \qquad x > 0$$

対称性から

$$\phi(x) = \frac{S_0 L}{2D}\exp\left(\frac{x}{L}\right), \qquad x < 0$$