中性子輸送理論　第３回（中性子輸送方程式）
講義ノート

東京工業大学　小原　徹

3.　中性子輸送方程式

3.1　中性子密度と中性子束

定義

角中性子密度　$n(\mathbf{r},E,\hat{\Omega},t)d^3rdEd\hat{\Omega}$

$$\equiv\left(\begin{array}{c}\text{時刻 t において}\mathbf{r}\text{のまわりの}d^3\mathbf{r}\text{、E のまわりの}\\ \text{dE に存在し、}\hat{\Omega}\text{の方向の立体角 }d\hat{\Omega}\text{の中を運動}\\ \text{している中性子数の期待値}\end{array}\right)$$

角中性子束

$$\varphi(\mathbf{r},E,\hat{\Omega},t)\equiv vn(\mathbf{r},E,\hat{\Omega},t)$$

ここで v は中性子の速さ

$$v=\sqrt{\frac{2E}{m}}$$

角中性子流

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},E,\hat{\Omega},t)\equiv v\hat{\Omega}n(\mathbf{r},E,\hat{\Omega},t)=\hat{\Omega}\varphi(\mathbf{r},E,\hat{\Omega},t)$$

中性子密度

$$N(\mathbf{r},E,t)=\int_{4\pi}d\hat{\Omega}n(r,E,\hat{\Omega},t)$$

さらに

$$N(\mathbf{r},t)=\int_0^\infty dEN(\mathbf{r},E,t)=\int_0^\infty dE\int_{4\pi}d\hat{\Omega}n(\mathbf{r},E,\hat{\Omega},t)$$

中性子束

$$\phi(\mathbf{r},E,t)=\int_{4\pi}d\hat{\Omega}\varphi(\mathbf{r},E,\hat{\Omega},t)$$

さらに

$$\phi(\mathbf{r},t)=\int_0^\infty dE\phi(\mathbf{r},E,t)=\int_0^\infty dE\int_{4\pi}d\hat{\Omega}\varphi(\mathbf{r},E,\hat{\Omega},t)$$

単位〔cm^{-2}・s^{-1}〕

中性子流

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},\mathrm{E},\mathrm{t}) \equiv \int_{4\pi} d\hat{\Omega}\,\mathbf{j}(\mathbf{r},\mathrm{E},\hat{\Omega},\mathrm{t})$$

さらに

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},\mathrm{t}) \equiv \int_0^\infty d\mathrm{E}\,\mathbf{J}(\mathbf{r},\mathrm{E},\mathrm{t}) = \int_0^\infty d\mathrm{E} \int_{4\pi} d\hat{\Omega}\,\mathbf{j}(\mathbf{r},\mathrm{E},\hat{\Omega},\mathrm{t})$$

3.2　中性子輸送方程式

任意の体積Ｖを考える。エネルギーE のまわり dE にあり、方向が$\hat{\Omega}$のまわりの$d\hat{\Omega}$にあるＶ内の中性子数は、

$$\left[\int_{\mathrm{v}} n(\mathbf{r},\mathrm{E},\hat{\Omega},\mathrm{t})d^3r\right] d\mathrm{E}d\hat{\Omega}$$

この中性子数変化の時間変化率は、中性子のつり合いで示される。

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left[\int_{\mathrm{v}} n(\mathbf{r},\mathrm{E},\hat{\Omega},\mathrm{t})d^3r\right] d\mathrm{E}d\hat{\Omega}$$
$$= (\mathrm{V}\text{内で得られる数}) - (\mathrm{V}\text{内で失なわれる数})$$

体積Ｖが時間に依存しないとすれば、

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left[\int_{\mathrm{v}} n(\mathbf{r},\mathrm{E},\hat{\Omega},\mathrm{t})d^3r\right] d\mathrm{E}d\hat{\Omega} = \left[\int_{\mathrm{v}} \frac{\partial n}{\partial \mathrm{t}} d^3r\right] d\mathrm{E}d\hat{\Omega}$$

中性子の増加の機構

①　Ｖ内のすべての中性子源（例えば核分裂）
②　Ｖの表面を通ってＶ内に入り込む中性子数
③　Ｖ内で衝突して E'から E に、$\hat{\Omega}'$から$\hat{\Omega}$に変わる中性子数

中性子の減少の機構

④　Ｖの表面を通ってもれ出る中性子
⑤　Ｖ内で衝突する中性子（吸収と散乱）

単位体積当りの中性子のつり合いの式
（中性子輸送方程式）

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v\hat{\Omega}\cdot\nabla n + v\Sigma_t n(\mathbf{r},E,\hat{\Omega},t)$$

$$= \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' v' \Sigma_s\left(E'\to E,\hat{\Omega}'\to\hat{\Omega}\right) n\left(\mathbf{r},E',\hat{\Omega}',t\right) + S(\mathbf{r},E,\hat{\Omega},t) \quad ①$$

ここで、

$$\Sigma_s(E'\to E,\hat{\Omega}'\to\hat{\Omega}) \equiv N\sigma_s(E'\to E,\hat{\Omega}'\to\hat{\Omega})$$

$\sigma_s\left(E'\to E,\hat{\Omega}'\to\hat{\Omega}\right)$：入射エネルギーE'、入射方向$\hat{\Omega}'$から散乱後、エネルギーE、方向$\hat{\Omega}$へと散乱する確率を表わす断面積（2 階微分散乱断面積）

$S(\mathbf{r},E,\hat{\Omega},t)d^3r dE d\hat{\Omega} \equiv$ [$\mathbf{r}$のまわりのd^3r、E のまわりの dE、$\hat{\Omega}$のまわりの d$\hat{\Omega}$内に現われる中性子の発生率]　（中性子源）

3.3　中性子輸送方程式の簡略化

- 単速近似：中性子が単一のエネルギー（単一の速さ）で表わされるものと仮定する。
  単速中性子輸送方程式

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \hat{\Omega}\cdot\nabla\varphi + \Sigma_t\varphi\left(\mathbf{r},\hat{\Omega},t\right) = \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \Sigma_s\left(\hat{\Omega}'\to\hat{\Omega}\right)\varphi\left(\mathbf{r},\hat{\Omega}',t\right) + S(\mathbf{r},\hat{\Omega},t)$$

- 等方中性子源

$$S\left(\mathbf{r},\hat{\Omega},t\right) = \frac{1}{4\pi}S(\mathbf{r},t)$$

- 等方散乱

$$\Sigma_s\left(\hat{\Omega}'\to\hat{\Omega}\right) = \frac{1}{4\pi}\Sigma_s$$

等方散乱等方中性子源輸送方程式

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \hat{\Omega}\cdot\nabla\varphi + \Sigma_t\varphi\left(\mathbf{r},\hat{\Omega},t\right) = \frac{\Sigma_s}{4\pi}\int_{4\pi} d\hat{\Omega}'\varphi\left(\mathbf{r},\hat{\Omega}',t\right) + \frac{S(\mathbf{r},t)}{4\pi}$$

等方散乱等方中性子源定常輸送方程式

$$\hat{\Omega}\cdot\nabla\varphi + \Sigma_t\varphi\left(\mathbf{r},\hat{\Omega}\right) = \frac{\Sigma_s}{4\pi}\int_{4\pi} d\hat{\Omega}'\varphi\left(\mathbf{r},\hat{\Omega}'\right) + \frac{S(\mathbf{r})}{4\pi}$$

等方散乱等方中性子源での 1 次元平板体系定常輸送方程式

$$\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\Sigma_t\varphi(x,\mu)=\frac{\Sigma_s}{2}\int_{-1}^{+1}d\mu'\varphi(x,\mu')+\frac{S(x)}{2}$$

$$\mu=\cos\theta$$