解析学　演習１　　　解答例

問題 1. 次の問いに答えよ.

(1)　$\mathrm{Re}\, z \leqq |z|$ を証明せよ. (配点:5 点)

(解答例)

$z = x + iy$ とすると, $\mathrm{Re}\, z = x$. また, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. よって,

$|z| - \mathrm{Re}\, z = \sqrt{x^2 + y^2} - x \geqq \sqrt{x^2} - x = |x| - x$　　($\because y^2 \geqq 0$ だから)

最後の式は, $x \geqq 0$ なら 0 に等しく, $x < 0$ なら $2|x|$ (>0) に等しい. いずれにせよ$\geqq 0$ だから

$|z| - \mathrm{Re}\, z \geq 0 \Leftrightarrow |z| \geq \mathrm{Re}\, z$ が示された.

(2)　三角不等式 $|z_1+z_2| \leqq |z_1|+|z_2|$ を, $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, $2\,\mathrm{Re}\, z = z + \bar{z}$ および(1)で示した関係を利用して導出せよ. (配点:8 点)

(解答例)

両辺＞０なので，両辺を２乗した式を証明する.

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq |z_1|^2 + |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_1|)^2$$

ここで $z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$,および, $\mathrm{Re}\ z \leqq |z|$ を用いた.

よって，両辺の平方根を取れば，$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_1|$ が導かれる.

(3)　$\overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)} = \dfrac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}$ を導出せよ. (配点:8 点)

(解答例１)　$z=x+iy$ 形式を用いる場合

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$　とおくと, $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} = \dfrac{x_2x_1 + y_2y_1}{x_1^2 + y_1^2} + i\dfrac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1^2 + y_1^2}$ なので

$\overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)} = \dfrac{x_2x_1 + y_2y_1}{x_1^2 + y_1^2} - i\dfrac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1^2 + y_1^2}$　一方, $\dfrac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \dfrac{x_2 - iy_2}{x_1 - iy_1} = \dfrac{x_2x_1 + y_2y_1}{x_1^2 + y_1^2} - i\dfrac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1^2 + y_1^2}$

よって，(左辺)=(右辺)が示された．

(解答例２)　極形式を用いる場合

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$，$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ と置くと，$\bar{z}_1 = r_1 e^{-i\theta_1}$，$\bar{z}_2 = r_2 e^{-i\theta_2}$ を用いて，

$$\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)} = \overline{\left(\frac{r_2 e^{i\theta_2}}{r_1 e^{i\theta_1}}\right)} = \frac{r_2}{r_1}\overline{e^{i\theta_2}e^{-i\theta_1}} = \frac{r_2}{r_1}\overline{e^{i\theta_2}}\cdot\overline{e^{-i\theta_1}} = \frac{r_2}{r_1}e^{-i\theta_2}e^{i\theta_1} = \frac{r_2 e^{-i\theta_2}}{r_1 e^{-i\theta_1}} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \quad \text{(了)}$$

(4)　$\bar{z} + 2iz = 1 - i$ を満たす複素数 z を求めよ．(配点:9 点)

複素数方程式の解法のポイント：　$z = x+iy$ を代入して＝０の形に変形し，
実部＝０かつ虚部＝０の連立方程式より x, y が求まる．

(解答例)

与式に $z = x+iy$ を代入すると，$\overline{(x+iy)} + 2i(x+iy) = 1-i \quad \Leftrightarrow \quad x - iy + 2ix - 2y = 1 - i$

（実部と虚部に分離する）

$\Leftrightarrow \quad x - 2y - 1 + i(2x - y + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-2y-1=0$ かつ $2x-y+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1, y=-1$

よって，$\underline{z = -1 - i}$

問題 2. 偏角の範囲を $0 \leqq \theta < 2\pi$ として,以下の複素数を極形式で表せ．(配点:各 10 点)

(解答例)

(1)　$$\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{11}{6}\pi\right)$$

(2)　$$\frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\pi + i\sin\pi)$$

極形式においては，負号は偏角で表す． 複素数の大きさは必ず正の実数．

(3)　$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i} = -i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$$

(4)　$$\sqrt[2]{i} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right)^{1/2} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)$$

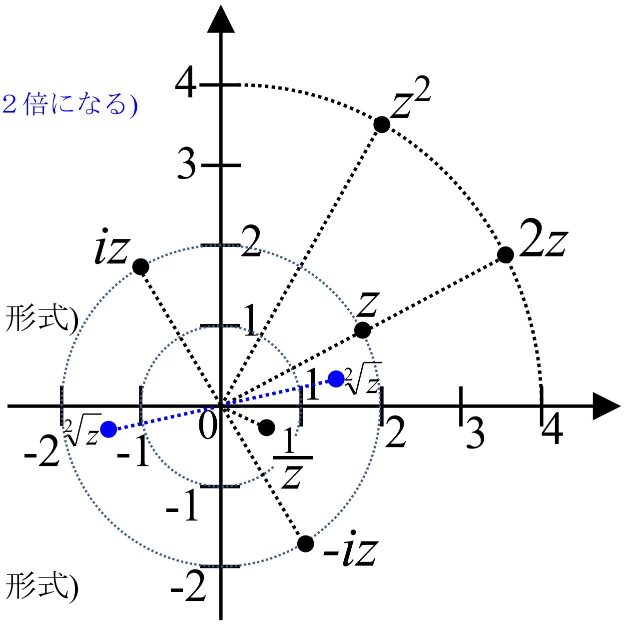
$$\therefore \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} \quad と \quad \cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4} \quad の２つ.$$

(注意)　n 乗根の公式で n=2 とすると，独立な解が２つ出てくる．実数でよく使われている $\sqrt{\ }$ 記号を使ってしまうと，$\pm\sqrt{\ }$ のどちらがどちらに対応するか決められないので，混同を避けるために使わない．(たとえば実部の符号だけ見て±を決める方法も考えられるが，ふつうは使わない．)

問題 3.　$z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ のとき，次の(1)～(4)の複素数を極形式，および，$x+iy$ の形で表し，複素平面上に図示せよ．(配点:各 10 点)

（解答例）　（偏角は主値を用いた．また，極表示の r は正であるものとする.）

まず，$z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}+i$　である．これを適宜用いると，



(1)　$2z=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}+i\cdot 2$　(原点からの距離が２倍になる)

（極表示）　　　($x+iy$ 形式)

(2)　$iz=2\left(i\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=-1+i\cdot\sqrt{3}$　($x+iy$ 形式)

$=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$　（極表示）(90°　回転)

(3)　$z^2=(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)=3+2\sqrt{3}\,i-1=2+i\cdot 2\sqrt{3}$　($x+iy$ 形式)

また，ド・モアブルの定理を使うと　$z^2=2^2\left(\cos 2\frac{\pi}{6}+i\sin 2\frac{\pi}{6}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$（極表示）

(大きさは２乗，偏角は２倍)

(4)　$\frac{1}{z}=\frac{1}{\sqrt{3}+i}=\frac{1}{\sqrt{3}+i}\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}=\frac{\sqrt{3}-i}{3+1}=\frac{\sqrt{3}}{4}-i\frac{1}{4}$　($x+iy$ 形式)

また，ド・モアブルの定理を使うと $z^{-1}=2^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

（極表示）

(大きさは $1/r$ 倍，偏角は符号が反転)

(5) $\sqrt[2]{z}=2^{1/2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right)\right)^{1/2}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+n\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+n\pi\right)\right)$

$\therefore\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ と $\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$

(大きさは√2，偏角は 15° と 195°．２乗根は，点対称な位置に２つあることに注意．)