1.[8 点、各 1 点]

(1) A $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ B $(\lambda-3)(\lambda+1)=0$

C 3 D -1

E $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ F $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

G $e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ H $e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. [２点] 上と同様に、係数行列$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$について考える。この行列の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

であるから、$-(3-\lambda)(1+\lambda)+4=0$, すなわち $\lambda^2-2\lambda+1=0$ すなわち $(\lambda-1)^2=0$ となって、固有値は $\lambda=1$ (重解)となる。対応する狭義の固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$と、ただ一つである。一方、$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$となることに着目すると、広義の固有ベクトルの一つとして$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$を上げることができる。従って、与えられた連立常微分方程式の一般解として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \exp t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \left[t \exp t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \exp t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C_1+C_2)\exp t + C_2\, t \exp t \\ -(2C_1+C_2)\exp t - 2C_2 t \exp t \end{pmatrix}$$

を一般解として得る。