解析学理解度の確認（３）　解答例

問題 1.　ア －A,　　イ －B,　　ウ －C,　　エ －B
　　オ －D,　　カ －B,　　キ －B,　　ク -A

ア～カ：各２点, キ-クは両方とも正解にて 2 点、合計 14 点

問題 2.　ア － 斉次,　　イ － 非斉次,　　ウ － 和,　　エ － 一次従属
　　オ －　$y_1y_2' - y_2y_1'$ (全体の符号が異なるものも正解),　　カ －0
　　各２点、合計 12 点

問題 3.　以下の微分方程式について、一般解を求めよ。導出過程を必ず示すこと。
各 8 点、合計 24 点

(A) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+1}}$

これは変数分離形である。$y \neq 0$ として両辺を整理すると $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$ となる。両辺の積分を遂行すると $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x + C$ すなわち $\log|y| = \sqrt{x^2+1} + C$ となる。両辺の指数関数を取ると，$y = C_0 \exp\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ と一般解を得る。もちろん、C_0 は任意定数である。なお、 $y = 0$ の場合は、一般解で $C_0 = 0$ とした場合に相当するので、 $y = C_0 \exp\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ と書くことにより一般解に含まれている。したがって、求め得る一般解は $y = C_0 \exp\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ (C_0 は任意定数)である。

(B) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{2x+y}{x+2y}$

これは同次形かつ完全微分形である。計算の容易な完全微分型と考えれば、整理すると $(2x+y)\mathrm{d}x + (x+2y)\mathrm{d}y = 0$ となる。したがって、変形すれば $\mathrm{d}\left(x^2+xy+y^2\right) = 0$ となることがわかり、これから一般解を $x^2+xy+y^2 = C$ (ただし C は任意定数)と求めることができる.

(C) $y' - \dfrac{1}{x}y = x$

これは一階線形非斉次方程式である。この与式の形から、暗黙のうちに定義域として $x \neq 0$ と考えられる。そこで、両辺を x で除し、 $\dfrac{1}{x}y' - \dfrac{1}{x^2}y = 1$ と変形すると、左辺に積の微分の公式を適用することができて、 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{y}{x}\right) = 1$ と変形できる。そこで、両辺を x で積分すれば

$\frac{y}{x} = x + C$ すなわち、一般解として $y = x^2 + Cx$ (ただし C は任意定数)を得る。