微分方程式

- 1階線形斉次方程式
- 1階線形非斉次方程式
- 完全微分形

今日のポイント:
微分方程式の種類を分類できる。
1階斉次・1階非斉次微分方程式・完全微分形に積分を適用し、解くことができる。

4. 1階線形斉次方程式

目標

- 1階線形斉次方程式の意味が理解できる
- 1階線形斉次方程式の解き方が理解できる

- $$f\left(x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) = 0$$ の形が解ける
- $$f\left(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) = 0$$ の形が解ける

4.1　1階線形斉次方程式とは

- 未知関数yとその1階導関数y'について1次方程式となっている微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (4.1)$$

を、**1階線形方程式**という。

  - $p(x)$, $q(x)$はある区間で連続で、その区間での解を検討する。
  - 式(4.1)で恒等的に$q(x) = 0$である次のような方程式を1階線形**斉次方程式**(または1階線形同次方程式)という。

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (4.2)$$

4.1　つづき

- 4章では、**1階線形斉次方程式**の解法を扱う。

- 式(4.1)において、$q(x) \neq 0$である方程式を1階線形**非斉次方程式**(または1階線形**非同次**方程式)といい、その解法は5章で扱う。

4.2 1階線形斉次方程式の解き方

微分方程式(4.2)は $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -p(x)y$

となり、これは**変数分離形**である。$y \neq 0$とし両辺をyで割ると $\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -p(x)$

となる。この両辺をxで積分すると

$\displaystyle\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\int p(x)\mathrm{d}x + C_0$ すなわち $\displaystyle\log|y| = -\int p(x)\mathrm{d}x + C_0$

となる。ここでC_0は任意定数である。

4.2　　つづき

いま少し変形すると

$$\left|y\right| = \exp\left\{-\int p\left(x\right)\mathrm{d}x + C_0\right\} = \exp C_0 \exp\left\{-\int p\left(x\right)\mathrm{d}x\right\}$$

$$y = C\exp\left\{-\int p\left(x\right)\mathrm{d}x\right\} \qquad (4.3)$$

なお、$C = \pm \exp C_0$ とおいた。

一方、$y = 0$は式(4.3)において$C = 0$としたときの特殊解。

以上より、微分方程式(4.2)の一般解は

$$y = C\exp\left\{-\int p\left(x\right)\mathrm{d}x\right\}$$

となる。ここでCは任意定数である。1階微分方程式なので、1つの任意定数Cを含む。

例題4.1

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy = 0 \quad (4.4)$$

を解く。

(解) 式(4.4)から $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -xy$ となる。$y \neq 0$として両辺

yで割ると $\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x$ となる。この両辺をxで積分

すると $\displaystyle\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\int x\,\mathrm{d}x + C_0$

すなわち $\log|y| = -\dfrac{1}{2}x^2 + C_0$ となる。C_0は任意定数である。

いま少し変形すると

$$|y| = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 + C_0\right) = \exp C_0 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

例題4.1　　つづき

すなわち $y = C\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$

ただし、$C = \pm \exp C_0$ とおいた。

一方、$y = 0$ は式(4.5)において$C = 0$としたときの特殊解である。

以上より、微分方程式(4.4)の一般解は

$$y = C\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

となる。ただし、Cは任意定数である。

例題4.2

$$y' - Py = 0 \qquad (4.6)$$

を解く。

ただし、Pは定数とする。

(解) 式(4.6)は、微分方程式(4.2)において $p(x) = P$ とした定係数の場合である。よって一般解は

$$y = C\exp\left\{-\int\left(-P\right)\mathrm{d}x\right\} = C\exp\left(\int P\,\mathrm{d}x\right) = C\exp\left(Px\right)$$

となる。

4.3 階数の引き下げによる解き方

2階微分方程式 $f\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) = 0$

において、**yが含まれていないもの** $f\left(x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) = 0$

は、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u$ とおくと, $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ であるので、

1階微分方程式

$$f\left(x, u, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

へと**階数を引き下げられる。**

4.3　　つづき

一方、2階微分方程式　$f\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) = 0$

において、**xが含まれていないもの** $f\left(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) = 0$

は、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u$ とおくと, $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}u$

であるので、 $f\left(y, u, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right) = 0$　となる。

これはyを独立変数とする**1階微分方程式**と見なせる。

例題 4.3と4.4

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$ を解く。

- 上記は**y, xを含まない**2階微分方程式である。
- この微分方程式を、
  - yが含まれていないと考える場合(例題4.3)
  - xが含まれていないと考える場合(例題4.4)
- の2通りで解いてみる。

例題4.3 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ を解く。

(解) yが含まれていないことに着目し、 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u$

とおく。 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ であるので、与式は

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u = 0$ 即ち $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u$ となる。変数分離形なので

容易に一般解 $u = C_1 \exp x \left(= \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right)$ を得る。C_1は任意

定数である。さらに両辺をxで積分すると

$$y = C_1 \exp x + C_2 \tag{4.7}$$

となる。ここに、C_2も任意定数である。

例題4.4 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ を解く。

(解) **xが含まれていない**ことに着目し、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u$

とおく。$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}u$ であるので、与式は

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}u - u = u\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} - 1\right) = 0$$ となる。

まず、$u = 0\left(= \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ の時、$y = C$となる。Cは任意定数である。

例題4.4　　つづき

次に、 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}-1=0$ のとき、 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=1$ より

$u=y+C_{10}\left(=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ となる。C_{10}は任意定数である。

uを元に戻すと $\dfrac{1}{y+C_{10}}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1$ この両辺をxで積分すると

$\displaystyle\int\frac{1}{y+C_{10}}\mathrm{d}y=\int\mathrm{d}x$ すなわち $\log\left|y+C_{10}\right|=x+C_{200}$

C_{200}は任意定数である。さらに変形を続ける。

$$\left|y+C_{10}\right|=\exp\left(x+C_{200}\right)=\exp C_{200}\exp x$$

例題4.4　　さらにつづき

すなわち　$y + C_{10} = C_{20} \exp x$

$$\therefore y = C_{20} \exp x - C_{10} \tag{4.9}$$

上記の変形では$C_{20} = \pm \exp C_{200}$とおいた。

一方、$y = C$は、式(4.9)において$C_{20} = 0$とした場合である。

よって、式(4.8)の一般解は

$$y = C_{20} \exp x - C_{10}$$

である。

例題 4.3と4.4に関する考察

- 例題4.3と例題4.4は同じ微分方程式であるので、その一般解は当然同一となる。
- 例題4.3の一般解(4.7)のC_1とC_2を、
- それぞれC_{20}と$-C_{10}$に置き換えると
- 例題4.4の一般解(4.9)が得られる。

5. 1階線形非斉次方程式

目標

- 1階線形非斉次方程式の意味が理解できる
- 定数変化法による1階線形非斉次方程式の解き方が理解できる
- 非斉次方程式の一般解は、対応する斉次方程式の一般解と非斉次方程式の特殊解の和であることが理解できる
- 1階線形方程式の解がただ一つだけ存在する条件が理解できる。

5.1　1階線形非斉次方程式とは

- 1階線形方程式

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (5.1)$$

において、$q(x) \neq 0$である方程式を**1階非斉次線形方程式**(または1階非同次線形方程式)という。

– $q(x)$ を**非斉次項**という。

5.2 定数変化法による解き方

Variation of constants, by Lagrange

- 非斉次方程式の一般解を、対応する斉次方程式の解 y_h と、未知関数 c の積とおいて解く方法を**定数変化法**という。
- この解法は、本章で扱う1階線形非斉次方程式だけでなく、幅広い応用範囲を持っている。
  - 特性方程式が2重解となる定係数2階線形斉次方程式
  - 2階線形斉次方程式で1つの基本解からもう1つの基本解を求める場合
  - **2階線形非斉次方程式**

定数変化法

- 1階線形斉次方程式

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (5.2)$$

の一般解は、4.2節で求めたように

$$y = C_0 \exp\left\{-\int p\left(x\right)\mathrm{d}x\right\} \qquad (5.3)$$

で与えられる。式(5.3)において、$y_h = \exp\left\{-\int p\left(x\right)\mathrm{d}x\right\}$ とおくとともに、任意定数C_0を x の未知関数 c と置き換え,

$$y = cy_h \qquad (5.4)$$

として1階線形非斉次方程式(5.1)を解く。y_hは既知、よって未知関数 c が求まればよい。

定数変化法　　つづき

- 2つの関数 c とy_h がxの関数であることに注意すると、yの1階導関数は

$$y' = c'y_h + c\,y_h' \qquad (5.5)$$

となる。式(5.4)と式(5.5)を、式(5.1)に代入して整理すると

$$(c'y_h + c\,y_h') + p(x)\,c\,y_h = q(x),$$ すなわち

$$c'y_h + c\{y_h' + p(x)\,y_h\} = q(x)$$

ここで、y_h は1階線形斉次方程式(5.2)の解であるので、左辺第2項の{ }内はゼロとなる。よって

$$c'y_h = q(x)$$

定数変化法　　さらにつづき

- 上記の式からcを決定することが可能となる。即ち

$$c' = \frac{q(x)}{y_h} = \frac{q(x)}{\exp\left\{-\int p(x)\mathrm{d}x\right\}} = q(x)\exp\left\{\int p(x)\mathrm{d}x\right\}$$

- 積分すると

$$c = \int\left[q(x)\exp\left\{\int p(x)\mathrm{d}x\right\}\right]\mathrm{d}x + C$$

  – Cは任意定数である。よって、一般解は

$$y = cy_h = \left\{\int\left[q(x)\exp\left\{\int p(x)\mathrm{d}x\right\}\right]\mathrm{d}x + C\right\}\exp\left\{-\int p(x)\mathrm{d}x\right\}$$

$$= \exp\left\{-\int p(x)\mathrm{d}x\right\}\int\left[q(x)\exp\left\{\int p(x)\mathrm{d}x\right\}\right]\mathrm{d}x$$

$$+C\exp\left\{-\int p(x)\mathrm{d}x\right\} \qquad (5.6)$$

定数変化法　　さらにつづき

- 式(5.1)は1階微分方程式であるので、その一般解(5.6)は1つの任意定数Cを含む。

- 式(5.6)の変形は、単純な乗算で積分操作ではないから、別の任意定数を新たにつける必要はない。
  - というか、つけてはいけない。

線形非斉次微分方程式の解の構造

- ここで、非斉次方程式(5.1)の一般解(5.6)の右辺第2項

$$C\exp\left\{-\int p(x)\mathrm{d}x\right\}$$

は、対応する斉次方程式(5.2)の一般解。

- 第1項 $\exp\left\{-\int p(x)\mathrm{d}x\right\}\int\left[q(x)\exp\left\{\int p(x)\mathrm{d}x\right\}\right]\mathrm{d}x$

は、非斉次方程式の特殊解である

- 一般に、線形非斉次方程式の一般解は、対応する線形斉次方程式の一般解に、もとの非斉次方程式の特殊解（なんでも良い）を加えたものとなっている。

線形に限るが…

非斉次の一般解

＝斉次の一般解

＋　非斉次の特殊解

- それゆえ、非斉次の線形微分方程式については、
  - まずは斉次の一般解をもとめ、
  - そのあと、定数変化法、あるいは未定係数法などで非斉次の特殊解の1つを探す、
  - という手順で一般解を求めることとなる。

非斉次方程式の解の存在と一意性

- 式(5.6)において、ある点$x = X$でのyの値を指定すると、Cの値が一意に定まる。

- すなわち、非斉次方程式(5.1)の解がただ一つだけ必ず存在する。

例題5.1　$y' + xy = x$　を解く。

(解) まず、導出手順を理解すべく、公式を使わず解く。

対応する斉次方程式は $y' + xy = 0$, これは式(4.4)。

従ってその一般解は式(4.5), $y = C_0 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$.

そこで、 $y_h = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ として任意定数C_0を

未知関数cと置き換え、$y = cy_h = c\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ とおく。

これを問題文の非斉次方程式に代入すると

例題5.1

つづき

$$y' + xy = \left\{ c' \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) - \cancel{xc \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)} \right\} + x\left\{ \cancel{c \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)} \right\} = x$$

のように、斉次方程式の解の部分

$$c\left(y_h' + xy_h\right) = c\left\{ -x\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + x\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \right\} = 0$$

がキャンセルされる。以下、計算を続行する。

$$c' \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = x$$

$$c' = x\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

例題5.1　　さらにつづき

$$c = \int x \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{d}x + C = \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C$$

$$\therefore\ y = \left\{\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C\right\} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = 1 + C\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

と、一般解が求められた。

一方、公式(5.6)をそのまま使ってみる。$p(x) = x$, $q(x) = x$ となる。したがって

例題5.1

さらにつづき

$$y = \exp\left\{\int(-x)\,\mathrm{d}x\right\}\cdot\int\left\{x\exp\left(\int x\,\mathrm{d}x\right)\right\}\mathrm{d}x + C\exp\left\{\int(-x)\,\mathrm{d}x\right\}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\int\left\{x\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)\right\}\mathrm{d}x + C\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$= 1 + C\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

と、同一の結果が得られる。

例題5.1 の補足

- しかしながら、「非斉次一般解＝斉次一般解＋非斉次特殊解」の基本原則や、
- 公式(5.6)などに、常にこだわる必要はない。
  - もっとスマートな方法、特に計算ミスの少ない方法があれば、その方が良い。
- 例えば、「積の微分の公式」を逆に使う。
  - ある種の**積分因子法**

Integrating factor

$$(yz)' = y'z + yz', \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(yz) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}z + y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

補足：例題5.1のもう一つの解法（積分因子法）

- $y' + xy = x$
- 左辺の形に着目して、積の微分の公式が使えるように変形したい。そこで、両辺に$s(x)$をかけて、
- $s(x)y' + s(x)xy = s(x)\,x$ として、 $\dfrac{\mathrm{d}s(x)}{\mathrm{d}x} = s(x)x$ となるように$s(x)$を決める。
  - 式の変形をするだけなので、$s(x)$は特殊解が一つわかればそれで良い。
  - 変数分離なので容易。

例題5.1のもう一つの解法の続き

- $\dfrac{1}{s}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = x$ となるので、両辺をxで積分すると

$$\log|s| = \frac{1}{2}x^2 + C_0$$

- これから $s = \exp\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)$ が特殊解の一つと判る
- そこで、元の式の両辺に上のsをかけると

$$\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)y' + x\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)y = x\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

  - これで左辺を変形できて、 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\exp\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)y\right\} = x\exp\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)$
  - この両辺をxで積分すると

$$\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)y = \int x\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x = \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C$$

  - すなわち一般解は $y = 1 + C\exp\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)$

例題5.2　$y' - Ay = x$　を解く。ただし、Aは定数である。

(解) 式(5.6)において、$p(x) = -A,\ q(x) = x$ の場合である。
したがって一般解は

$$
\begin{aligned}
y &= \exp\left(\int A\,\mathrm{d}x\right)\int\left\{x\exp\left(-\int A\,\mathrm{d}x\right)\right\}\mathrm{d}x + C\exp\left(\int A\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \exp\left(Ax\right)\int\left\{x\exp\left(-Ax\right)\right\}\mathrm{d}x + C\exp\left(Ax\right) \\
&= \exp\left(Ax\right)\left\{-\frac{x}{A}\exp\left(-Ax\right) + \int\frac{1}{A}\exp\left(-Ax\right)\mathrm{d}x\right\} + C\exp\left(Ax\right) \\
&= \exp\left(Ax\right)\left\{-\frac{x}{A}\exp\left(-Ax\right) - \frac{1}{A^2}\exp\left(-Ax\right)\right\} + C\exp\left(Ax\right) \\
&= -\frac{x}{A} - \frac{1}{A^2} + C\exp\left(Ax\right)
\end{aligned}
$$

例題5.2補足 $y' - Ay = x$ を解く。ただし、Aは定数である。

(解) **積分因子法**を使ってみる。**両辺に$\exp(-Ax)$をかければ良い**ことは一目瞭然であろう。すなわち、

$$\exp(-Ax)y' - A\exp(-Ax)y = \exp(-Ax)x$$

左辺を変形すると $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\exp(-Ax)y\right\} = \exp(-Ax)x$

この両辺をxで積分すると

$$\exp(-Ax)y = \int \exp(-Ax)x\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{A}\right)\exp(-Ax)x + \frac{1}{A}\int \exp(-Ax)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{A}\exp(-Ax)x - \frac{1}{A^2}\exp(-Ax) + C$$

$$\therefore y = -\frac{x}{A} - \frac{1}{A^2} + C\exp(Ax)$$

例題5.3　$y' - Ay = \exp(Bx)$　を解く。ただし、A, Bは定数であるが、$A \neq B$である。

(解) 式(5.6)において、$p(x) = -A$, $q(x) = \exp(Bx)$ の場合である。したがって一般解は

$$
\begin{aligned}
y &= \exp\left(\int A\,\mathrm{d}x\right)\int\left\{\exp\left(Bx\right)\exp\left(-\int A\,\mathrm{d}x\right)\right\}\mathrm{d}x + C\exp\left(\int A\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \exp\left(Ax\right)\int\left\{\exp\left(Bx\right)\exp\left(-Ax\right)\right\}\mathrm{d}x + C\exp\left(Ax\right) \\
&= \exp\left(Ax\right)\int\left[\exp\left\{\left(B-A\right)x\right\}\right]\mathrm{d}x + C\exp\left(Ax\right) \\
&= \exp\left(Ax\right)\left[\frac{1}{B-A}\exp\left\{\left(B-A\right)x\right\}\right] + C\exp\left(Ax\right) \\
&= \frac{1}{B-A}\exp\left(Bx\right) + C\exp\left(Ax\right)
\end{aligned}
$$

例題5.4　$y' - Ay = \exp(Ax)$　を解く。

(解) 例題5.3において$A = B$の場合である。式(5.6)において$p(x) = -A$, $q(x) = \exp(Ax)$ である。よって一般解は

$$y = \exp\left(\int A\,\mathrm{d}x\right)\int\left\{\exp\left(Ax\right)\exp\left(-\int A\,\mathrm{d}x\right)\right\}\mathrm{d}x + C\exp\left(\int A\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \exp\left(Ax\right)\int\left\{\exp\left(Ax\right)\exp\left(-Ax\right)\right\}\mathrm{d}x + C\exp\left(Ax\right)$$

$$= \exp\left(Ax\right)\int \mathrm{d}x + C\exp\left(Ax\right)$$

$$= x\exp\left(Ax\right) + C\exp\left(Ax\right)$$

上の一般解第１項が特殊解に相当するが、その関数形は $\dfrac{1}{B-A}\exp\left(Bx\right)$ ではなく、$x\exp(Ax)$のように、**指数関数にxを掛けた形**になっていることに留意されたい。

例題5.4補足

$$\frac{1}{B-A}\exp\left(Bx\right)+C\exp\left(Ax\right)$$ で、$B \to A$の時の特殊解をどう考える？

- 上のままでは$B \to A$で発散する。任意定数を若干変形して $C=-\frac{1}{B-A}+C_0$ として上式を書き換えると
$$\frac{1}{B-A}\left[\exp\left(Bx\right)-\exp\left(Ax\right)\right]+C_0\exp\left(Ax\right)$$
- ここで$B \to A$とすると $\lim_{B\to A}\frac{\exp\left(Bx\right)-\exp\left(Ax\right)}{B-A}$ は、
- 微分の定義により
$$\lim_{B\to A}\frac{\exp\left(Bx\right)-\exp\left(Ax\right)}{B-A}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\left\{\exp\left(Ax\right)\right\}=x\exp\left(Ax\right)$$

それゆえ指数関数にxを掛けたような特殊解が現れる.

例題5.5　$xy' - y = x$　を解く。

(解) 両辺をxで割ると、$y' - \frac{1}{x}y = 1$　となる。式(5.6)において、$p(x) = -1/x,\ q(x) = 1$の場合である。

$$y = \exp\left(\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)\int \exp\left(-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + C\exp\left(\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \exp\left(\log|x|\right)\int \exp\left(-\log|x|\right)\mathrm{d}x + C\exp\left(\log|x|\right)$$

$$= x\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + Cx \quad = x\log|x| + Cx$$

なお、問題の微分方程式を変形すると　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} + 1$

となり、例題3.1の微分方程式と同一である。

例題5.5補足　$xy' - y = x$ を積分因子法で解く。

(解) 両辺をx^2で割ると、$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x}$ となる。すなわち

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}y\right) = \frac{1}{x}$$

この両辺をxで積分すると

$$\frac{y}{x} = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + C = \log|x| + C$$

$$y = x\log|x| + Cx$$

当然、解答は公式を使っても、斉次一般解＋非斉次特殊解としても、同一となる。種々の方法を試みられたい。

14. 完全微分形

目標

- 完全微分形の意味が理解できる
- 完全微分形となる関数の条件が理解できる
- 完全微分形の一般解が求められる
- 積分因数の意味が理解できる

14.1 完全微分形とは

- 1階微分方程式 $p\left(x,y\right)+q\left(x,y\right)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ に$\mathrm{d}x$をかけた方程式

$$p\left(x,y\right)\mathrm{d}x+q\left(x,y\right)\mathrm{d}y=0 \qquad (14.1)$$

を考える。

  - 2変数xとyは同じように扱う。
  - さらに、$p(x, y)$, $q(x, y)$は連続微分可能で、x, yに関する偏導関数が連続とする。

- 式(14.1)の左辺がある関数 $f(x, y)$ の全微分

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \qquad (14.2)$$

で表される時、式(14.1)を完全微分形方程式という。

- この時、(14.1)は $\mathrm{d}f = 0$ とかけるので、その一般解は

$$f(x, y) = C$$

となる。ここに C は任意定数である。

14.2 完全微分形の条件と一般解

- 微分方程式(14.1)が完全微分形であるとき、(14.1)と(14.2)を比較すれば、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p,\ \frac{\partial f}{\partial y} = q$$

となる関数 f が存在する。この時、

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

となり、

- これらの関数が連続であれば微分順序を交換できるので

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

が成り立つ。

- 逆に、

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \qquad (14.3)$$

を満足する関数p, qが与えられた時、関数fを求める方法を以下に示す。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p$$

より、 $f = \int p\,\mathrm{d}x + c$

となる。ここで、関数cはyだけの関数であることに注意する。この時、

$$q = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int p\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}y}$$

すなわち $$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}y} = q - \frac{\partial}{\partial y}\int p\,\mathrm{d}x \qquad (14.4)$$

となる。

- よって、関数fは

$$f = \int p\,\mathrm{d}x + \int\left(q - \frac{\partial}{\partial y}\int p\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \qquad (14.5)$$

となる。

- すなわち、(14.1)の一般解は、

$$\int p\,\mathrm{d}x + \int \left(q - \frac{\partial}{\partial y} \int p\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = C$$

となる。ここにCは任意定数である。

- 式(14.4)の右辺をxで微分すると、式(14.3)から

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(q - \frac{\partial}{\partial y} \int p\,\mathrm{d}x \right) = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

となり、式(14.5)の右辺第2項 $\int \left(q - \frac{\partial}{\partial y} \int p\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$ はxを含まず、yのみの関数になることが理解できる。

- 式(14.5)において、一般に $\int q\,\mathrm{d}y$ はxとyの関数になるが、
- xを含む部分 $\frac{\partial}{\partial y}\int p\,\mathrm{d}x$ を引くことで

- yだけの関数の部分を取り出して、第2項として加えることで一般解が得られていることがわかる。

- また、式(14.5)において、xとy, pとqを入れ替えて

$$f = \int q\,\mathrm{d}y + \int \left(p - \frac{\partial}{\partial x} \int q\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \qquad (14.6)$$

で求めることもできる。

  - 式(14.5)の場合と同様に、式(14.6)の右辺の第2項$\int \left(p - \frac{\partial}{\partial x} \int q\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$ はyを含まずxだけの関数。

- 一般に、$\int p\,\mathrm{d}x$ はxとyの関数であるが、そのうちxだけの関数の部分を取り出して、第２項として加えれば一般解が求められることがわかる。

例：変数分離形は、完全微分形の一種

- 2章で扱った変数分離形 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(x\right)g\left(y\right)$ は

$$f\left(x\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{g\left(y\right)}\mathrm{d}y = 0$$

$$p\left(x,y\right) = f\left(x\right)$$

と変形できる。

  - ここで $p(x, y) = f(x)$ とおくと、pはxだけの関数であるので $\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0$
  - 同様に、$q\left(x,y\right) = -\dfrac{1}{g\left(y\right)}$ とおくと、qはyだけの関数であるので

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

- よって、

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}\left(=0\right)$$

を満たすので、変数分離形は完全微分形の一種と言える。

例題14.1 $y\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y = 0$が完全微分形であることを示して、それを解く。

(解)

- $p = y,\ q = x - y$であるので、$\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial q}{\partial x} = 1$ すなわち完全微分形である。
- 式(14.5)より

$$
\begin{aligned}
f &= \int y\,\mathrm{d}x + \int\left(x - y - \frac{\partial}{\partial y}\int y\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= xy + \int\left\{\left(x-y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(xy\right)\right\}\mathrm{d}y \\
&= xy + \int\left(\cancel{x} - y - \cancel{x}\right)\mathrm{d}y \\
&= xy - \int y\,\mathrm{d}y = xy - \frac{1}{2}y^2 = C
\end{aligned}
$$

となる。

- 右辺の第２項は $\int\left\{\left(x-y\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(xy\right)\right\}\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}y^2$ となり、yだけの関数。
- この項は

$$\int q\,\mathrm{d}y=\int\left(x-y\right)\mathrm{d}y=xy-\frac{1}{2}y^2$$

においてyだけの関数の部分に相当していることが解る。

完全微分形の補足

- ここまでテキストに則り説明したが、具体的問題には、(14.5)は使いにくいし、計算ミスしやすい。良くない。
  - 工学では、問題を見通しよく、素早く、間違い難い方法で解くことも、大変重要。
- (14.3)を使って完全微分形であることが確認できたら、左辺の微分形式に積の微分の公式

$$\mathrm{d}\left(pq\right) = p\mathrm{d}q + q\mathrm{d}p$$

が必ず適用できるはず。

完全微分形の補足 続き

- この性質を使って、**左辺の微分形式をくくり直し**て、 $$\mathrm{d}\left[\ldots\right]=0$$
- すなわち $$\mathrm{d}f\left(x,y\right)=0$$
  と変形すれば、
- 直ちに一般解 $$f\left(x,y\right)=C$$
  が得られる。

補足の計算例 $\left(3x^2+6xy^2\right)\mathrm{d}x+\left(6x^2y+4y^3\right)\mathrm{d}y=0$

- これは完全微分形である。
  - 各自確かめよ。
- 変形していく。

$$3x^2\mathrm{d}x+\boxed{6xy^2\mathrm{d}x+6x^2y\mathrm{d}y}+4y^3\mathrm{d}y=0$$

- すなわち $\mathrm{d}\left(x^3\right)+\boxed{\mathrm{d}\left(3x^2y^2\right)}+\mathrm{d}\left(y^4\right)=0$
- すなわち

$$\mathrm{d}\left(x^3+3x^2y^2+y^4\right)=0$$

- 一般解は $x^3+3x^2y^2+y^4=C$

14.3 積分因子

- 微分方程式 $p\left(x,y\right)\mathrm{d}x+q\left(x,y\right)\mathrm{d}y=0$ が、完全微分形でなくとも、
- 両辺に、ある関数$m(x, y)$を掛けた式

$$m\left(x,y\right)p\left(x,y\right)\mathrm{d}x+m\left(x,y\right)q\left(x,y\right)\mathrm{d}y=0 \quad (14.7)$$

が完全微分形になる時、

- この関数$m(x, y)$を**積分因子**という。
- 式(14.7)が完全微分形である条件は

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(mp\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(mq\right)$$

- すなわち $p\frac{\partial m}{\partial y}-q\frac{\partial m}{\partial x}+m\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}\right)=0$ (14.8)
  である。
  - 積分因子*m*を一般的に求める方法は存在しない。

- 以下の特別な場合には、求められる。
- 積分因子が*x*だけの関数*m*(*x*)の時、$\frac{\partial m}{\partial y}=0$
  - とすれば、式(14.8)は

$$-q\frac{\partial m}{\partial x}+m\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}\right)=0$$

となる。これを変形すると

$$\frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial x}=\frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}\right)$$

- 上の式の左辺は*x*だけの関数であるので、右辺も*x*だけの関数となる。
- この微分方程式は変数分離形であり、*m*(*x*)は以下の様に求められる。

$$m\left(x\right)=\exp\left\{\int\frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\right\}$$

- 積分因子が*y*だけの関数のとき、同様に

$$m\left(y\right)=\exp\left\{-\int\frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}\right)\mathrm{d}y\right\}$$

積分因子が容易に求められる例

1. $\frac{1}{q}\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\psi\left(x\right)$ となる時

$$m\left(x,y\right)=m\left(x\right)=\exp\left[-\int\psi\left(x\right)\mathrm{d}x\right]$$

2. $\frac{1}{p}\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\psi\left(y\right)$ となる時

$$m\left(x,y\right)=m\left(y\right)=\exp\left[\int\psi\left(y\right)\mathrm{d}y\right]$$

3. $x^2\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)\frac{1}{xp+yq}=\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ となる時

$$m\left(x,y\right)=m\left(\frac{y}{x}\right)=\exp\left[\int\psi\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

例題14.2　$xy\,\mathrm{d}x + (x^2 - xy)\,\mathrm{d}y = 0$ の積分因子を求めて、この微分方程式を解く。

(解)

- $p = xy,\ q = x^2 - xy$ であるので

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = x - 2x + y = -x + y = -\frac{q}{x}$$

となる。すると、 $\frac{1}{q}\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) = -\frac{1}{x}$ がxだけの関数。

- それゆえ、積分因子は

$$m(x) = \exp\left[\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right] = \exp\left(-\log|x|\right) = \frac{1}{x}$$

- となる。
- 積分因子をかけた微分方程式は

$$y\mathrm{d}x + \left(x - y\right)\mathrm{d}y = 0$$

となり、例題14.1と同じになるので、その解は

$$xy - \frac{1}{2}y^2 = C$$

となる。

まとめ:本日の確認事項

- 1階線形斉次方程式の意味が理解できる
- 1階線形斉次方程式の解き方が理解できる
- $$f\left(x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) = 0$$ の形が解ける
- $$f\left(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) = 0$$ の形が解ける
- 1階線形非斉次方程式の意味が理解できる
- 定数変化法による1階線形非斉次方程式の解き方が理解できる

まとめ　つづき

- 非斉次方程式の一般解は、対応する斉次方程式の一般解と非斉次方程式の特殊解の和であることが理解できる
- 1階線形方程式の解がただ一つだけ存在する条件が理解できる。
- 完全微分方程式は、左辺がある関数の全微分になっていることが理解できる。
- 完全微分系の必要十分条件が理解できる
- 完全微分方程式の一般解を求めることができる。