

解析学 第4回

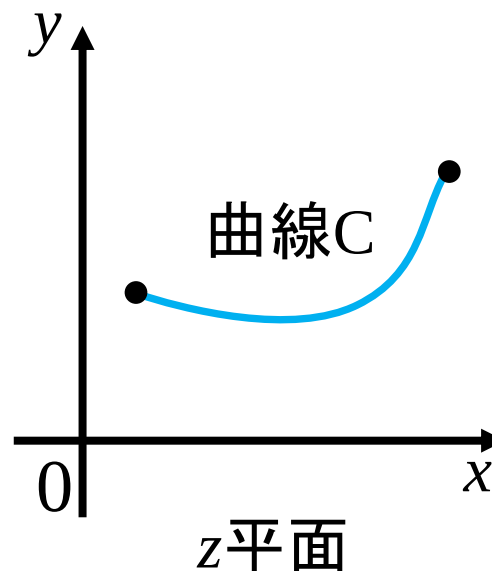
複素積分と積分路

- 線積分
- 積分公式
- 積分路

複素積分

複素関数 $f(z)$ の積分は、
複素平面上の曲線Cに沿った線積分として
次式のように表される.

$$\int_C f(z) dz$$



曲線Cを積分路という.

積分路には始点と終点がある.

積分路の媒介変数表示

積分路としての曲線Cを,

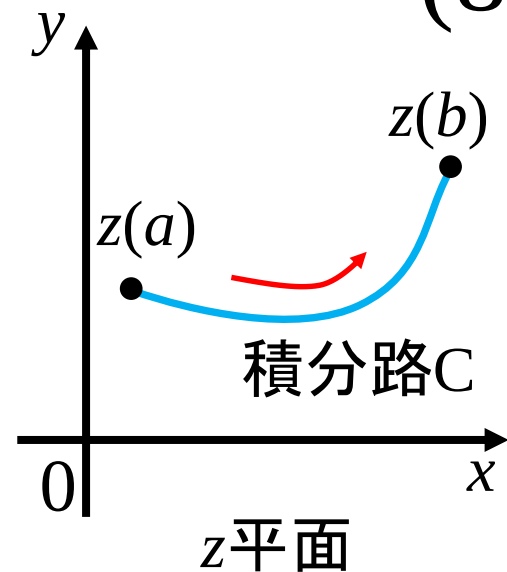
実変数 t を用いて媒介変数表示すると

$$C: z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b) \quad (8.1)$$

(ただし, $z(a)$ が始点,
 $z(b)$ が終点を表すものとする.)

積分路には始点と終点がある.

始点と終点を逆にした逆向きの
積分路を $-C$ と表す.

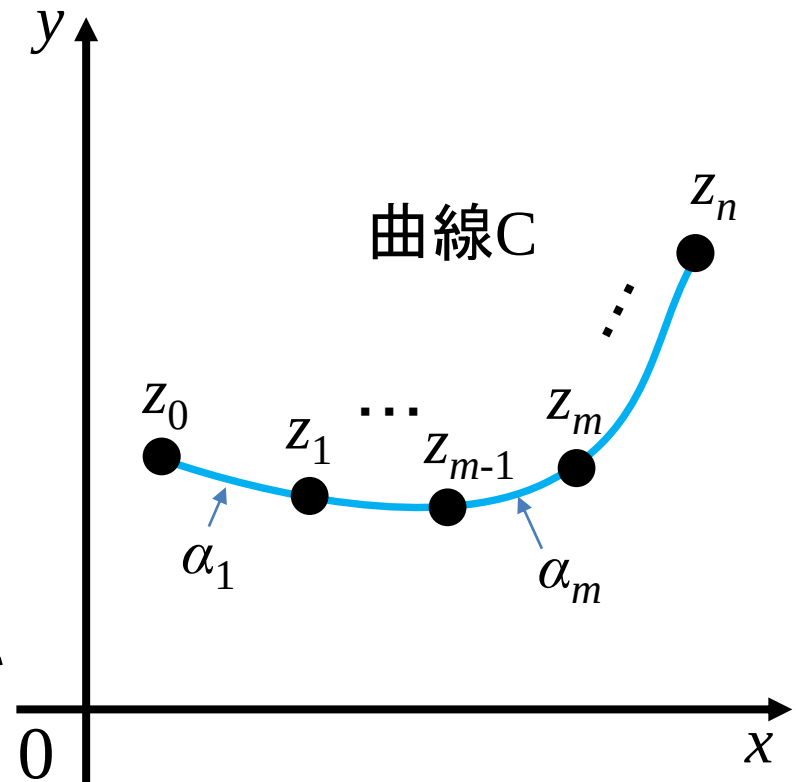


積分の計算法

実数関数の線積分と同じで、積分路を細分化して、和を取る.

- 積分路Cを n 分割.
- 分割点: $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n$
- z_{m-1} と z_m の間に α_m をおく.
- 関数値 $f(\alpha_m)$ と, 区間距離 $\Delta z_m \equiv z_m - z_{m-1}$ の積の和 S_n を

$$S_n \equiv \sum_{m=1}^n f(\alpha_m) \Delta z_m \quad \text{とおく.}$$



S_n は分割の仕方や α_m の選び方によって変化するが,
 $n \rightarrow \infty$ として分割数を無限大にすると, 区間距離 $|\Delta z_m| \rightarrow 0$ となり,
それとともに S_n が一定値に収束するとき,
積分の値は次のように定義される.

$$\int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n f(\alpha_m) \Delta z_m \quad (8.2)$$

複素積分の定義式

(注) $f(z)$ が正則関数(微分可能)でなくても, 上の極限值が存在すれば, 積分自体は定義可能.

積分公式

実数関数の線積分で成り立つ式は概ね成り立つ

1) $\int_C kf(z)dz = k \int_C f(z)dz$ k は複素定数 (複素定数倍)

2) $\int_C \{f(z) \pm g(z)\}dz = \int_C f(z)dz \pm \int_C g(z)dz$ (和と差)

3) $\int_C f(z)dz = -\int_{-C} f(z)dz$ (積分路を逆にたどると符号±が逆になる)

4) $\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$ (積分路の分割)

5) $\left| \int_C f(z)dz \right| \leq ML$ ただし $|f(z)| \leq M$, また, L は積分路 C の長さ (8.3)
(定理の証明等によく使われる)

6) $F'(z) = f(z)$ ならば, $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$ (定積分) (8.4)
($F(z)$ を $f(z)$ の不定積分と呼ぶ)

6) 以外は非正則関数でも成り立つ.

積分公式の導出

$$3) \quad \int_C f(z)dz = -\int_{-C} f(z)dz \quad (\text{積分路を逆にたどると符号±が逆になる})$$

(導出)

積分の定義式 $\int_C f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n f(\alpha_m) \Delta z_m$ の Δz_m は $\Delta z_m = z_m - z_{m-1}$ であり, 添え字 m は進行方向に増加させるように番号を振っている. したがって,

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n f(\alpha_m) \Delta z_m \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ f(\alpha_1)(z_1 - z_0) + f(\alpha_2)(z_2 - z_1) + \dots + f(\alpha_n)(z_n - z_{n-1}) \} \end{aligned}$$

一方, 積分路 C を, $z_n, z_{n-1}, \dots, z_1, z_0$ と逆にたどる積分路をあらためて C' と呼ぶことにすると, C' に沿った積分は

積分公式の導出

$$3) \quad \int_C f(z)dz = -\int_{-C} f(z)dz \quad (\text{積分路を逆にたどると符号±が逆になる})$$

$$\begin{aligned} \int_{C'} f(z)dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ f(\alpha_n)(z_{n-1} - z_n) + f(\alpha_{n-1})(z_{n-2} - z_{n-1}) + \dots + f(\alpha_1)(z_0 - z_1) \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ f(\alpha_n) \{ \underbrace{-(z_n - z_{n-1})}_{\text{注目}} \} + f(\alpha_{n-1}) \{ -(z_{n-1} - z_{n-2}) \} + \dots + f(\alpha_1) \{ -(z_1 - z_0) \} \} \end{aligned}$$

つまり、進行方向の反転に伴い、 Δz_m の符号が反転するだけなので、

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n f(\alpha_m)(-\Delta z_m) = -\int_C f(z)dz$$

この逆方向の積分路 C' を $-C$ と表記したのが与式.

積分公式の導出

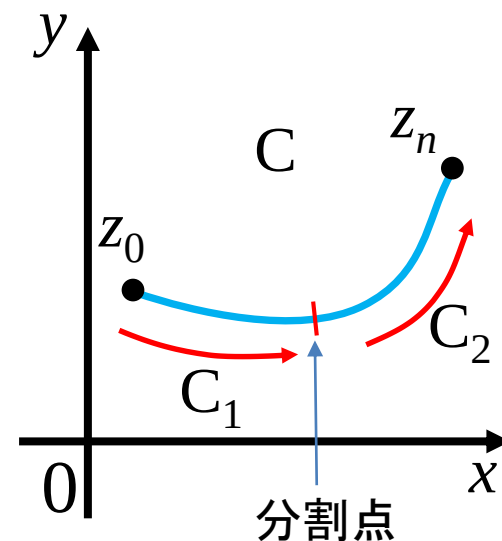
$$4) \quad \int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz \quad (\text{積分路の分割})$$

(導出)

積分路 C を途中の点で分割し,
 $C=C_1+C_2$ と表記する.

(分割点は C_1 の終点であり, かつ,
 C_2 の始点になるように定める.)

積分の定義式で C_1 と C_2 を別々に求め,
それらの結果の和をとって,
 Σ を1つにまとめて表記したのが与式.



積分公式の導出

$$5) \quad \left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML \quad \text{ただし } |f(z)| \leq M, \text{ また, } L \text{ は積分路 } C \text{ の長さ} \quad (8.3)$$

(定理の証明等によく使われる)

(導出)

$|f(z)|$ が有限で, $|f(z)| \leq M$ となる M が存在する場合を考える.

また, 積分路 C の長さを L とする. 積分の定義式(8.2)の絶対値をとると

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n f(\alpha_m) \Delta z_m \right| \quad \leftarrow \text{両辺の絶対値をとった}$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n |f(\alpha_m)| |\Delta z_m| \quad \leftarrow \text{一般化された三角不等式 (1.6) より}$$

$$\leq M \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n |\Delta z_m|$$

$|f(z)| \leq M$

積分路上に $f(z) \rightarrow \infty$ に発散する点が無く, 有界であることを表している.

$$\leq M \cdot L \quad \text{複素平面上での曲線の長さの定義}$$

曲線の長さ L

$$\Delta z_m = z_m - z_{m-1} \quad \text{とおくと,}$$

曲線の長さ L は

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n |\Delta z_m|$$

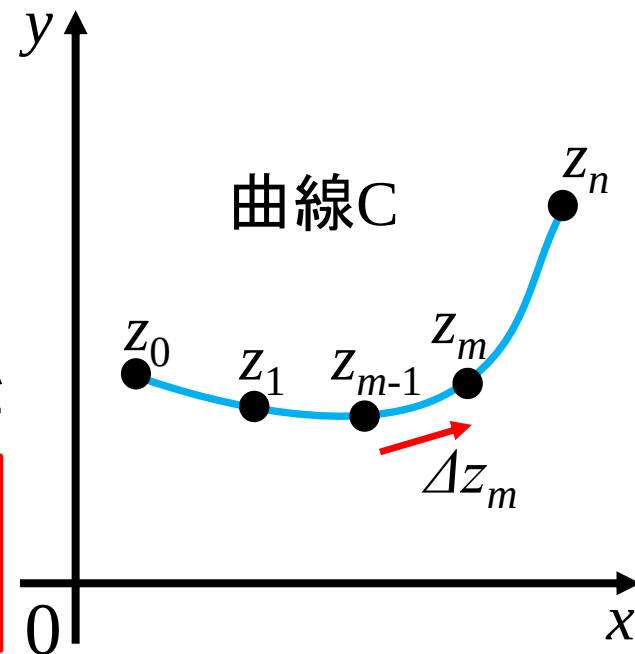
微小区間の
長さの総和

ここであらためて z を媒介変数表示すると

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

すると

ただし t の増加方向を
積分路の進行方向に
あわせるものとする.



$$\Delta z(t) = \Delta x(t) + i\Delta y(t)$$

これを t の変化分 Δt で表現すると $\Delta x(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t} \Delta t$, $\Delta y(t) = \frac{\partial y(t)}{\partial t} \Delta t$ より

$$\Delta z(t) = \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t} + i \frac{\partial y(t)}{\partial t} \right) \Delta t$$

以上から, 曲線の長さ L を変数 t で表すと

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n |\Delta z_m| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left| \left(\frac{\partial x}{\partial t} + i \frac{\partial y}{\partial t} \right) \Delta t_m \right| \quad \text{ただし, } z_m = z(t_m) \text{ などとした.}$$

$$\Delta t_m = t_m - t_{m-1}$$

積分路の進行方向と t の増加方向を合致させたことから
 $\Delta t_m > 0$ は常に保証されているので, Δt_m は絶対値の外に出せて

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left| \left(\frac{\partial x}{\partial t} + i \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right| \Delta t_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2} \Delta t_m$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $\Delta t_m \rightarrow 0$ より, 積分の定義式から, 積分路 C の始点 t_0 , 終点 t_n とすると,

$$= \int_{t_0}^{t_n} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2} dt = \int_{t_0}^{t_n} |z'| dt \quad \text{ただし } z' \text{ は } z \text{ の } t \text{ に関する微分である}$$

始点, 終点を対応する z であえて書き直すと, (式としてはあまり正確な書き方ではないが)

$$= \int_{z_0}^{z_n} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \int_{x_0 + iy_0}^{x_n + iy_n} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \quad \text{ただし } x', y' \text{ は } t \text{ に関する微分}$$

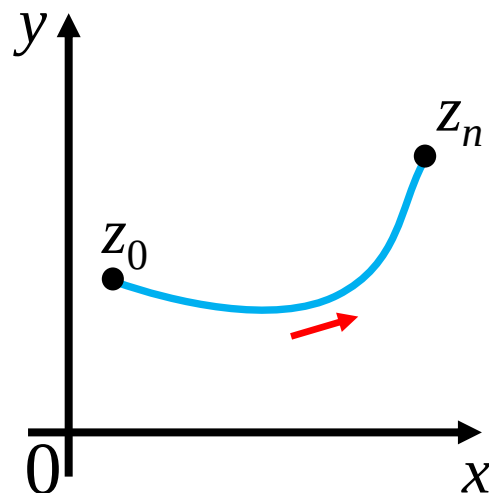
積分路を表現する $x(t), y(t)$ が与えられれば, 積分路の長さ L を計算できる.

不定積分と積分値

6) $F'(z) = f(z)$ ならば, $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$

領域D内で正則な関数 $f(z)$ に対して
D内で正則な関数 $F(z)$ が存在し,
 $F'(z) = f(z)$ が成り立つとき

$F(z)$ を $f(z)$ の**不定積分** という.



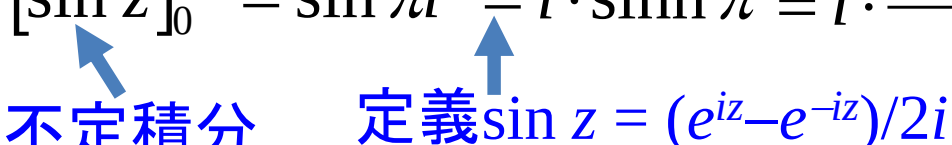
また, 始点 z_0 から終点 z_1 までの積分値は
途中の経路によらず, 終点 $F(z_1)$ と始点 $F(z_0)$ の
差で与えられる.

例題8. 1 不定積分により複素積分

$$(1) \int_0^{\pi i} \cos z \, dz \quad (2) \int_{-i}^i \frac{1}{z} \, dz \quad \text{を求めよ.}$$

(解)

$$(1) \int_0^{\pi i} \cos z \, dz = [\sin z]_0^{\pi i} = \sin \pi i = i \cdot \sinh \pi = i \cdot \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}$$



(2) 微分公式(11)より, $(\log z)' = 1/z$ であつたから, $1/z$ の不定積分は $\text{Log } z$ (主値を取つた)
 また, 例題5.5(3)より, $\text{Log } i = \pi i/2$ などを用いると,

$$\int_{-i}^i \frac{1}{z} \, dz = [\text{Log } z]_{-i}^i = \text{Log}(i) - \text{Log}(-i) = \frac{\pi i}{2} - \left(-\frac{\pi i}{2}\right) = \pi i$$

ただし, $\text{Log } z$ が正則ではない $z=0$ と, 負の実軸上は除く. $(-\pi < \text{Arg } z \leq \pi$ と定めた場合)

$\text{Log } z$ はそもそも偏角 $\text{Arg } z$ の定義域の境界, たとえばこの場合 $-\pi$ (負の実軸上) では不連続にならざるをえない. 第2象限から第3象限へまたぐと虚部の値 ($= \text{Arg } z$) が $\pi \rightarrow -\pi$ と飛んでしまう. 従つて, 偏角の定義域の境界線上では複素関数として値は定義されるが正則ではない $\rightarrow$ 微分は定義されない $\rightarrow$ 不定積分も定義されない

積分路の取り方と 積分計算の実際

積分しようとする関数が正則で、不定積分がわかっているのであれば、

積分の値は、積分経路によらず、不定積分の始点と終点の値だけで決まってしまうので、(←あとで証明する)

積分路に沿って実際に積分計算を実行する必要はない。

一方、必ずしも正則でない関数の場合、あるいは、正則でない部分を含む関数の積分の値は、具体的な積分路を設定して、注意深く線積分を計算する必要がある。

積分路の取り方と 積分計算の実際

複素平面は2次元だが，線積分は積分路という一本道を進みながら実部と虚部について値を加算していくので，本質的に1次元で記述できるはずである．

このことから，複素積分を実行する方法として，1変数の媒介変数表示を用いた方法がよく用いられる．

この基本原理を明らかにし，実際の積分計算を行ってみよう．

媒介変数表示による 積分路の表現

積分の定義式 $\int_C f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n f(\alpha_m) \Delta z_m \quad (8.2)$

$f(z)$ を実部と虚部に分けて考える. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

また, $\Delta z_m = \Delta x_m + i\Delta y_m$ と書くことにすると, S_n は

$$S_n = \sum_{m=1}^n f(\alpha_m) \Delta z_m = \sum_{m=1}^n (u + iv)(\Delta x_m + i\Delta y_m)$$

実部と虚部に整理しなおすと

$$= \left(\sum_{m=1}^n u \Delta x_m - \sum_{m=1}^n v \Delta y_m \right) + i \left(\sum_{m=1}^n u \Delta y_m + \sum_{m=1}^n v \Delta x_m \right)$$

$n \rightarrow \infty$ とすると, $|\Delta z_m| \rightarrow 0$ のときに $|\Delta x_m| \rightarrow 0$, $|\Delta y_m| \rightarrow 0$ となるから
積分の定義によって

$$\int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \left(\int_C u dx - \int_C v dy \right) + i \left(\int_C u dy + \int_C v dx \right)$$

積分路 C を, 媒介変数 t を使って次のように表す.

$$C: z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

右辺の実積分を t を使って書き直す. すなわち,

$$dx = \frac{dx}{dt} dt, \quad dy = \frac{dy}{dt} dt$$

これらの関係式を使って

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \left(\int_a^b u \frac{dx}{dt} dt - \int_a^b v \frac{dy}{dt} dt \right) + i \left(\int_a^b u \frac{dy}{dt} dt + \int_a^b v \frac{dx}{dt} dt \right) \\ &= \int_a^b (u + iv) \left(\frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_a^b f\{z(t)\} \frac{dz}{dt} dt \end{aligned}$$

媒介変数表示による 積分

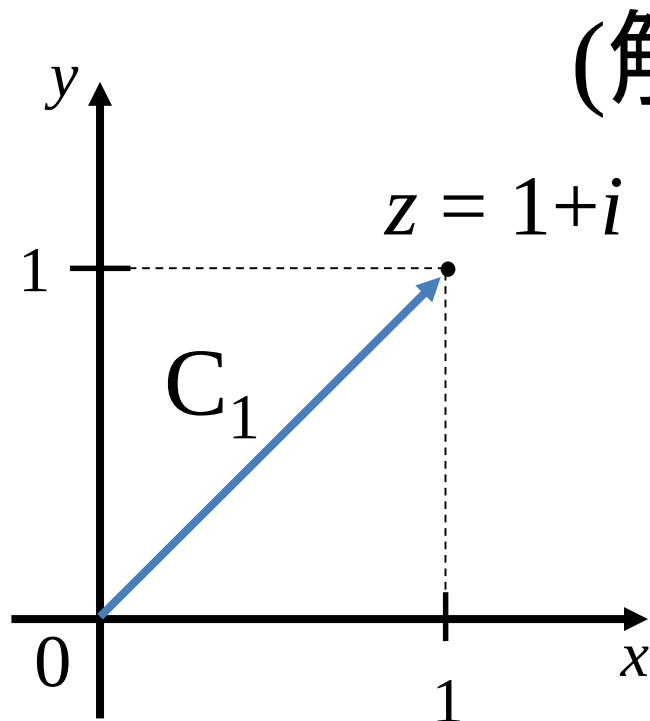
$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f\{z(t)\} \frac{dz}{dt} dt$$

(手順)

この項を忘れない

1. 積分路を複素平面上の図で確認し, 必要なら分割する
2. 積分路Cを, $z(t)=x(t)+iy(t)$ のように媒介変数 t を使って式で表す
3. 関数 $f(z)$ 内の z に $z(t)$ を代入して, t の関数として $f\{z(t)\}$ を表す
4. $dz(t)/dt$ を求める
5. $\int_C f(z)dz = \int_a^b f\{z(t)\} \frac{dz}{dt} dt$ を計算する.

例) $f(z)=z^2$ を積分路 C_1 で積分せよ



(解)

1) 積分路 C_1 は1本の線分であり
分割の必要はない

2) (x,y) 平面における C_1 の式 $y=x$ ($0 \leq x \leq 1$)
を参考にして, 例えば, 媒介変数表示
 $x(t)=t, y(t)=t$ とすれば

$$C_1: z(t) = x(t) + i y(t) = (1+i)t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

3) $f(z)=z^2$ を t で表す. すなわち,

$$\{z(t)\}^2 = \{(1+i)t\}^2 = (1+2i-1)t^2 = 2it^2$$

$$4) \quad \frac{dz(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \{(1+i)t\} = (1+i)$$

$$\begin{aligned} 5) \quad \int_C z^2 dz &= \int_0^1 2it^2 (1+i) dt = 2i(1+i) \int_0^1 t^2 dt = 2(i-1) \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 2(i-1) \frac{1}{3} \\ &= \underline{\underline{\frac{2}{3}(i-1)}} \end{aligned}$$

例) $f(z)=z^2$ を積分路 C_2 で積分せよ

(解) 1) 積分路 C_2 を2本の線分に分割する.
すなわち, $C_2 = C_{2-1} + C_{2-2}$

積分路 C_{2-1} の積分計算

2) $x(t)=t, y(t)=0$ とおくと $C_{2-1}: z(t) = t \quad (0 \leq t \leq 1)$

3) $f(z)=z^2$ を t で表す. すなわち, $\{z(t)\}^2 = t^2$

$$4) \quad \frac{dz(t)}{dt} = \frac{d}{dt} t = 1$$

$$5) \quad \int_{C_{2-1}} z^2 dz = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

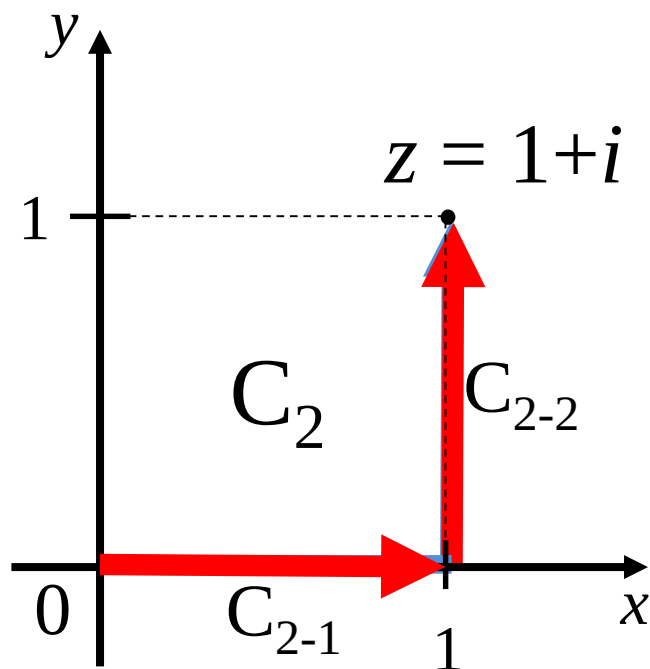
積分路 C_{2-2} の積分計算

6) $x(t)=1, y(t)=t$ とおくと $C_{2-2}: z(t) = 1 + it \quad (0 \leq t \leq 1)$

7) $f(z)=z^2$ を t で表す. すなわち, $\{z(t)\}^2 = (1 + it)^2$

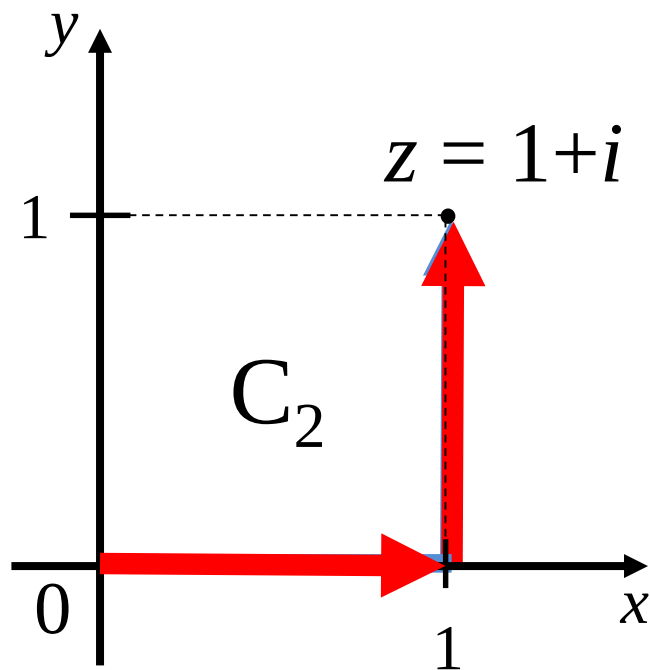
$$8) \quad \frac{dz(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (1 + it) = i \quad \quad \quad = 1 - t^2 + 2it$$

$$9) \quad \int_{C_{2-2}} z^2 dz = \int_0^1 (1 - t^2 + 2it) i dt = i \left[t - \frac{t^3}{3} + it^2 \right]_0^1 = i \left(1 - \frac{1}{3} + i \right) = \frac{2}{3}i - 1$$



例) $f(z)=z^2$ を積分路 C_2 で積分せよ

(解)



10) 2つの積分値を加え合わせると求める積分の値になる. すなわち,

$$\begin{aligned}\int_{C_2} z^2 dz &= \int_{C_{2-1}} z^2 dz + \int_{C_{2-2}} z^2 dz \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2i}{3} - 1 = \underline{\underline{\frac{2}{3}(i-1)}}\end{aligned}$$

$f(z)$ は正則なので, 経路によらず積分の結果は同じ値になる.

z^2 の不定積分 $z^3/3$ を使って計算しても同じ.

例題8. 2

積分路を単位円 $|z|=1$ として, $1/z$ を反時計回りに1周積分せよ

(解) 積分路を複素平面上に図示すると右図.

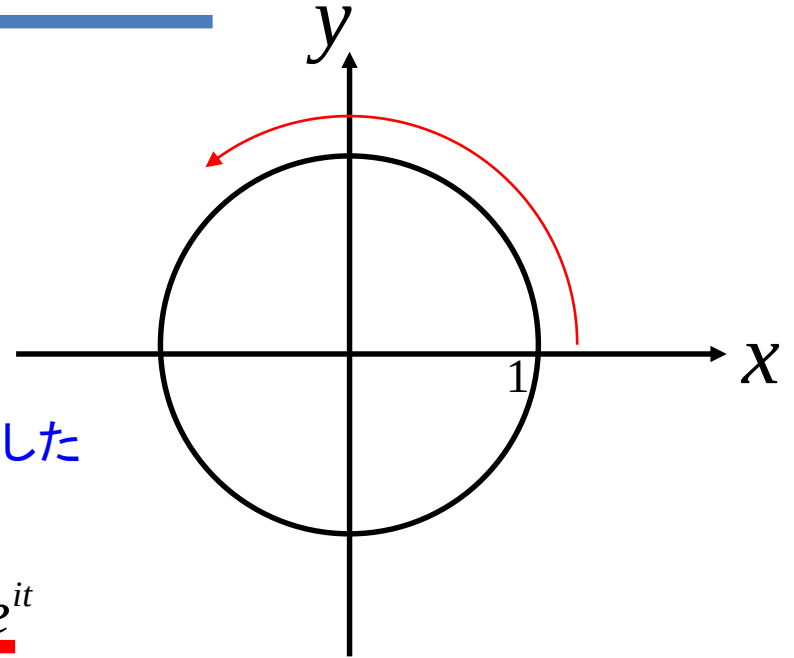
1) 積分路の表式は1つの式で表せるから分割の必要はない.

2) $C: z(t) = e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$
始点, 終点を $z=1$ に設定した
これで単位円上を1周できる.

3) $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{e^{it}}$

4) $\frac{dz}{dt} = ie^{it}$

5) $\int_C \frac{1}{z} dz = \int_C \frac{1}{z} \frac{dz}{dt} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$



始点と終点が一致している場合, $f(z)$ が正則なら必ず積分値は0になるはず.

そうならないのは, この場合, $1/z$ の不定積分 $\text{Log } z$ が実軸上で正則ではないから.

中心 z_0 , 半径 r の円上で, 整数べき関数

$f(z)=(z-z_0)^m$ を反時計回りに1周積分した値

⇒重要な応用があるので整理しておく

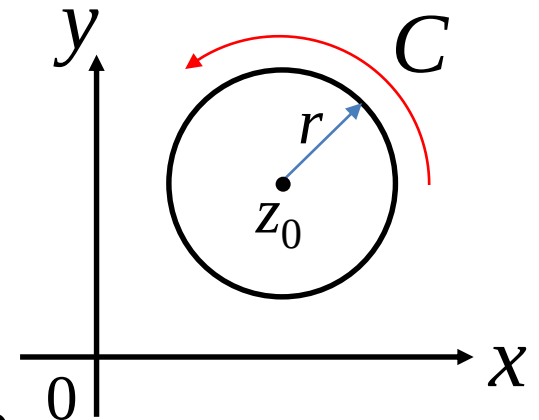
(解) 積分路を複素平面上に図示すると右図.

1) 積分路の表式は1つの式で表せるから
分割の必要はない.

2) $C: z(t) = z_0 + re^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

始点, 終点を $z=z_0+r$ に設定した

これで z_0 を中心に半径 r の円上を1周できる.



3) $f(z) = (z - z_0)^m = (re^{it})^m = r^m e^{imt}$ 4) $\frac{dz}{dt} = ire^{it}$

5) $\int_C (z - z_0)^m dz = \int_0^{2\pi} r^m e^{imt} ire^{it} dt = ir^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt$

$m+1=0$ の場合
とそうでない場合

この積分の値は整数 m の値によって場合分けが必要.

整数べき関数の円上周回積分

前ページ最後の結果:

$$\int_C (z - z_0)^m dz = ir^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt$$

1) $m = -1$ の場合

$$\int_C (z - z_0)^m dz = \int_C \frac{1}{z - z_0} dz = ir^{-1+1} \int_0^{2\pi} e^{i(-1+1)t} dt = i \int_0^{2\pi} 1 dt = i[t]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

2) $m \neq -1$ の場合

$$\int_C (z - z_0)^m dz = ir^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt = ir^{m+1} \left[\frac{e^{i(m+1)t}}{i(m+1)} \right]_0^{2\pi} = \frac{r^{m+1}}{m+1} (1 - 1) = 0$$

(べき関数の積分)
(前ページ最後の式)

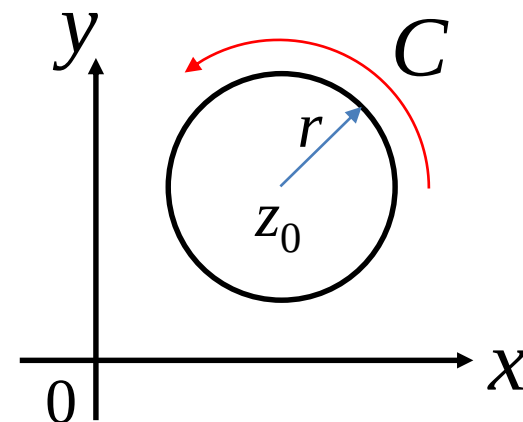
ここで $e^{2\pi(m+1)i} = e^0 = 1$ を用いた.

なお, 周期 2π の関数の1周積分は必ず0である.

結果をまとめると,

中心 z_0 , 半径 r の円上で, 整数べき関数
 $f(z)=(z-z_0)^m$ を反時計回りに1周積分した値

m が整数のとき,



$$\int_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & (m = -1) \\ 0 & (m \neq -1) \end{cases} \quad (8.6)$$

複素積分の基礎になる重要な結果！

まとめ：本日の確認事項

- 複素積分の定義を説明できる
- 正則関数の複素積分を計算できる
- 積分路の媒介変数表示ができる
- 媒介変数を使って積分できる
- 整数べき級数の単位円上の積分結果が書ける