

- ・問題解答用のレポート用紙に、学籍番号と氏名を記載すること。

1. 位置 x , 時刻 t が満たす波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{a})$$

の一般解を以下の手順で求めることを考える。ただし、 $A \neq 0$ とする。

(1) 波動方程式(a)において、2つの独立変数 $v = x - At$, $w = x + At$ を新たに導入すると、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w} = 0 \quad (\text{b})$$

となることを示せ。

(2) この偏微分方程式を解くと、ダランベールの解

$$u = c_1(x - At) + c_2(x + At) \quad (\text{c})$$

が得られることを示せ。ここに $c_1(v)$, $c_2(w)$ は、それぞれ v , w の任意関数である。

2. 誘電率 ε 、透磁率 μ の一様な媒質中の電磁波の伝搬を考える。ここで基礎方程式として、アンペールの法則とファラデーの電磁誘導の法則を用いる。アンペールの法則は、

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

と書かれる。ただし、電界 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$, 磁界 $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y, z, t)$, 電流密度 $\mathbf{J}$ である。一方ファラデーの電磁誘導の法則は

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

である。

(1) アンペールの法則に対して時間微分を施した式と、ファラデーの電磁誘導の法則に対して rot をとった式から、 $\mathbf{H}$ を消去し、 $\mathbf{E}$ の満たす偏微分方程式を導け。なお、ベクトル解析の公式 $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{E}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ をもちいよ。

(2) (1) の解を用いて、電荷も電流もない媒質中の電界 $\mathbf{E}$ は、波動方程式に従うことを示せ。

(3) 電磁波の伝搬速度 c (光速) を、誘電率と透磁率を用いて表せ。

(4) (2) の波動方程式において、電界 $\mathbf{E}$ が $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y, z) \exp(-i\omega t)$ のように変数分離できると仮定する(i は虚数単位、 ω は定数; 角振動数あるいは角周波数と言われる)。この場合について、電界の空間部分 $\mathbf{E}_0$ が満たす方程式を導け。

(5) (4) の解のような方程式は一般に誰の方程式と呼ばれるか、その名称を答えよ。