2018/06/04

平成 30 年度　解析学　赤塚担当分　試験問題 (理解度の確認 4 )

**1.** 以下の線型微分方程式の一般解を求めよ

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \qquad y'' + 8y' + 25y = 0 \\
&\text{(b)} \qquad y'' - 2y' - 8y = \exp(-2x) \\
&\text{(c)} \qquad y''' - 2y'' - y' + 2y = 0
\end{aligned}
$$

**2.** 以下の線型非斉次連立常微分方程式を解く事を考える。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \quad 3x + y + 1, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -4x - y + 1. \tag{2}$$

(a) 上式 (1)-(2) を解くために、まず、対応する斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \quad 3x + y, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -4x - y \tag{4}$$

から考察を開始する。式 (3)-(4) の一般解を得るべく、以下の空欄 $A - G$ を適切な数式・行列・ベクトル等で埋めよ。

「式 (3)-(4) を 2 行 2 列の行列 ( $A$ ) を用いてベクトル表示すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{5}$$

である。行列 ( $A$ ) の固有値 $\lambda$ は固有方程式 $\det(A - \lambda I_2) = 0$ から求められる (ただし $I_2$ は $2 \times 2$ の単位行列)。これより、$\lambda$ の従う 2 次方程式を ( $B$ ) $= 0$ と得ることができる。これを解くと $\lambda =$ ( $C$ ) と、重解が得られる。固有値 ( $C$ ) に対応する狭義の固有ベクトル $\boldsymbol{q}_1 =$ ( $D$ )(規格化不要) であり、1 次独立なものはこれのみである。そこで、広義の固有ベクトル $\boldsymbol{q}_2$ として $(A - \lambda I_2)\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}_1$ となるベクトルを 1 つ求めると $\boldsymbol{q}_2 =$ ( $E$ )(規格化不要) である。よって、狭義の固有ベクトルのみで記述される式 (3)-(4) の第 1 の基本解 $\boldsymbol{x}_1$ として $\boldsymbol{x}_1 =$ ( $F$ ), 広義固有ベクトルも含めて表される第 2 の基本解 $\boldsymbol{x}_2$ として $\boldsymbol{x}_2 =$ ( $G$ ) となる。よって任意定数を $C_1, C_2$ として式 (3)-(4) の一般解を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1( \ F \ ) + C_2( \ G \ ) \tag{6}$$

と書くことができる。」

(b) 次に、式 (1)-(2) の特殊解の一つを求める。本問の場合、非斉次項は定数のみであるから、系 (1)-(2) が定常状態にあれば、定常状態の $(x, y)$ が直ちに 1 つの特殊解を与える。$x, y$ の定常値をそれぞれ $x_0, y_0$ とし、特殊解の一つとしての $(x_0, y_0)$ を求めよ。

(c) 以上をまとめ、式 (1)-(2) の一般解を記せ。

**3.** 関数 $u = u(x, y)$ に対する以下の偏微分方程式 (7) について考察する。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{7}$$

(a) 偏微分方程式 (7) は、楕円型、放物型、双曲型のいずれに分類されるか、理由と共に述べよ。

(b) 式 (7) において、$u = \exp(ax + by)$ (ただし、$a, b$ は定数とする) とおいて代入することにより、$u$ の特殊解を 2 つ見出せ。

(c) 式 (7) において、$x, y$ の一次式として定義される 2 つの独立変数

$$\xi = 4x + y, \tag{8}$$

$$\eta = 2x - y \tag{9}$$

を新たに導入すると、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{10}$$

となることを示せ。

(d) 偏微分方程式 (10) の一般解を求めると、次式となることを示せ。

$$u = c_1(\xi) + c_2(\eta) = c_1(4x + y) + c_2(2x - y) \tag{11}$$

と与えられる。ここに $c_1(\xi), c_2(\eta)$ は、それぞれ $\xi, \eta$ の任意関数である。

以上

平成 30 年度　解析学　赤塚担当分　試験　解答例　　　　　　　　　　2018/06/04

**1** [10点×3=30点] (a) 特性方程式は $\lambda^2+8\lambda+25=0$ である。これを解くと、$\lambda=-4\pm 3i$ となる。よって、一般解は

$$y=\exp(-4x)(C_1\sin 3x+C_2\cos 3x)$$

となる。(ただし、$C_1, C_2$ は任意定数)

(b) まず、対応する斉次方程式 $y''-2y'-8y=0$ について考える。この特性方程式は $\lambda^2-2\lambda-8=0$, すなわち $(\lambda-4)(\lambda+2)=0$ となる。これを解くと、$\lambda=4,-2$ となる。よって、対応する斉次方程式の一般解は $y=C_1\exp(4x)+C_2\exp(-2x)$ となる。

次に、非斉次方程式の右辺非斉次項が $\exp(-2x)$ となって、対応する斉次方程式の基本解と一致することから、特殊解の形として $y=Ax\exp(-2x)$ を仮定し、与式に代入する。$y'=A\exp(-2x)-2Ax\exp(-2x)$, $y''=-4A\exp(-2x)+4Ax\exp(-2x)$ となるので、左辺 $=y''-2y'-8y=-4A\exp(-2x)+4Ax\exp(-2x)-2A\exp(-2x)+4Ax\exp(-2x)-8Ax\exp(-2x)=-6A\exp(-2x)\equiv\exp(-2x)=$ 右辺、となることから、$A=-1/6$ となって、特殊解の一つとして $y=-\frac{1}{6}x\exp(-2x)$ を得る。

よって、求め得る一般解は、

$$y=C_1\exp(4x)+C_2\exp(-2x)-\frac{1}{6}x\exp(-2x)$$

となる。(ただし、$C_1, C_2$ は任意定数)

(c) 特性方程式は $\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=0$ となる。すなわち $(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)=0$ となるので、$\lambda=2,1,-1$ を得る。よって、求め得る一般解は

$$y=C_1\exp(2x)+C_2\exp(x)+C_3\exp(-x)$$

となる。(ただし、$C_1, C_2, C_3$ は任意定数)

**2** [(1)(A) - (D) 各 1 点×4 = 4点, (E)-(G)各 2 点×3 = 6点, (2)-(3) 各10点、合計30点]

(a) $A$: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

$B$: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)+4=(\lambda-1)^2=0$, 従って $B$ は $(\lambda-1)^2$

$C$: 1

$D$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=0$ から、$a=1, b=-2$ が固有ベクトル、すなわち $D$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ あるいはそのゼロ以外の定数倍

$E$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ から、$c=0, d=1$ が広義の固有ベクトル、すなわち $E$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$F$: $\exp t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$G\colon\ (t\exp t)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+\exp t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\ \text{または}\ \exp t\begin{pmatrix}t\\-2t+1\end{pmatrix}$$

(b) 与式で $\mathrm{d}/\mathrm{d}t\equiv 0$ とおき、

$$\begin{cases}3x_0+y_0+1=0\\-4x_0-y_0+1=0\end{cases}$$

を解けば $(x_0,y_0)=(2,-7)$ を得る。これが非斉次の特殊解の一つである。

(c) 非斉次の一般解は、斉次の一般解と非斉次の特殊解の和で与えられるから、求め得る一般解は

$$x=C_1\exp t+C_2t\exp t+2,$$
$$y=-2C_1\exp t-2C_2t\exp t+C_2\exp t-7$$

となる。

**3** [(a) - (d)各10点、合計40点 ](a) 一般に、2 階の定数係数線形偏微分方程式

$$A\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+B\ \frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G$$

において ($A-G$ は定数)、$B^2-4AC$ の符号が負ならば楕円型、ゼロならば放物型、正ならば双曲型である。本問題の場合は $A=1,B=-2,C=-8$ であり、$B^2-AC=4+32=36>0$ であるので、双曲型となる。

(b)$u=\exp(ax+by)$ とおいて、各偏微分係数を計算すると

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a\exp(ax+by),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=b\exp(ax+by),$$
$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=a^2\exp(ax+by),\quad \frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=ab\exp(ax+by),\quad \frac{\partial^2u}{\partial y^2}=b^2\exp(ax+by)$$

となる。これらを与えられた偏微分方程式 (7) に代入すると、$(a^2-2ab-8b^2)\exp(ax+by)=0$, 従って $(a^2-2ab-8b^2)=(a-4b)(a+2b)=0$ を得る。これから $a=4b,-2b$ の関係が満たされる時に $u=\exp(ax+by)$ は問題文の式 (7) の特殊解をあたえることが理解される。$a=4b$ ならば、特殊解は $u=\exp[b(4x+y)]$ で与えられ, $a=-2b$ ならば、特殊解は $u=\exp[b(-2x+y)]$ で与えられる。ここに、$b$ はゼロでない定数、例えば 1。したがって、$u$ の 1 次独立な 2 つの特殊解として

$$u=\exp(4x+y),\quad u=\exp(-2x+y)$$

を得ることができる。

(c) 与式 (7) の各項を $(\xi,\eta)$ に関する偏微分で書きあらためるべく、変数として $(x,y)$ から $(\xi,\eta)$

への変換を行い、計算を進める。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=4\frac{\partial u}{\partial \xi}+2\frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(4\frac{\partial u}{\partial \xi}+2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(4\frac{\partial u}{\partial \xi}+2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(4\frac{\partial u}{\partial \xi}+2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\\&=4\frac{\partial}{\partial \xi}\left(4\frac{\partial u}{\partial \xi}+2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+2\frac{\partial}{\partial \eta}\left(4\frac{\partial u}{\partial \xi}+2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=16\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+16\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \qquad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\\&=4\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+2\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \qquad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)-\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \qquad (3)\end{aligned}$$

を得る。上記の式 (1)-(3) を問題文の式 (7) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=16\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+16\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\\&\quad-8\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-8\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+16\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-8\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=36\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$$

が示された。

(d)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0 \qquad (4)$$

より、$\xi$ について式 (4) を積分することにより

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=c_3(\eta). \qquad (5)$$

を得る。ただし $c_3(\eta)$ は $\eta$ の任意関数である。さらに、$c_3(\eta)$ の原始関数を $c_2(\eta)$ と書くことにすれば、これももちろん $\eta$ の任意関数の 1 つであり、一方で $\dfrac{\mathrm{d}c_2(\eta)}{\mathrm{d}\eta}=c_3(\eta)$ である。よって式 (5) は

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{u-c_2(\eta)\right\}=0 \qquad (6)$$

と変形される。$\eta$ について式 (6) を積分することにより、$c_1(\xi)$ を $\xi$ の任意関数とすると、

$$u-c_2(\eta)=c_1(\xi)\quad \text{すなわち}\quad u=c_1(\xi)+c_2(\eta)=c_1(4x+y)+c_2(2x-y) \qquad (7)$$

と、$u$ の一般解が求められた。2 階の偏微分方程式に対して、2 つの任意関数を含んでおり、上の式は確かに本問題の偏微分方程式の一般解である。

以上