

1. [4 点; 各 2 点]

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial w}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial w} \right) = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial w} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial w} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w} + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

同様に

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t} = -A \frac{\partial u}{\partial v} + A \frac{\partial u}{\partial w}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= A \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial w} \right) = A \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial}{\partial v} \left(-\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial w} \right) + A \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial w} \left(-\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial w} \right) \\ &= A^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w} + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

よって、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w} = 0 \quad (5)$$

から、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w} = 0 \quad (6)$$

となる。

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial w} \right) = 0 \quad (7)$$

より、 $\frac{\partial u}{\partial w}$ は v に依存しない関数、すなわち w だけの関数となるので、これを w の任意関数 $c_3(w)$ とおく。すなわち

$$\frac{\partial u}{\partial w} = c_3(w). \quad (8)$$

さらに、 $c_3(w)$ の原始関数を $c_2(w)$ と書くことにすれば、これももちろん w の任意関数の 1 つであり、一方で $\frac{dc_2(w)}{dw} = c_3(w)$ である。よって式 (8) は

$$\frac{\partial}{\partial w} \{u - c_2(w)\} = 0 \quad (9)$$

と変形される。式 (9) から、 $u - c_2(w)$ は v だけの関数となるので、これを v の任意関数 $c_1(v)$ と書くこととすると、

$$u = c_1(v) + c_2(w) = c_1(x - At) + c_2(x + At) \quad (10)$$

と、D'Alembert の解が得られる。

2. [6 点、(1) のみ 2 点、ほかは各 1 点]

$$(1) \quad \text{アンペールの法則の時間微分を取ると} \quad \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{H}) = \text{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (11)$$

となる。一方、ファラデーの法則の rot をとると

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{E}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\text{rot}\left(\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) = -\mu \text{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) \text{となる。} \quad (12)$$

(11)を(12)に代入して

$$\text{grad}(\text{div } \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \left(\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right) \quad (13)$$

を得る。なお、左辺第1項に Gauss の法則を適用すると、(13)は

$$\frac{1}{\varepsilon} \text{grad}(\rho) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \left(\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right) \quad (14)$$

となる。上記が求め得る解である。

(2) 次に、(14)式は常に成立するが、電荷も電流もないならば、 $\rho = 0, \mathbf{J} = 0$ である。したがって(14)

$$\text{式は簡単になり、} \nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (15)$$

を得る。これは明らかに波動方程式である。

$$(3) (15) \text{式で、} \varepsilon \mu = \frac{1}{c^2} \text{と書き直せば、明らかに} \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (16)$$

となって、波動としての電界 $\mathbf{E}$ が光速で伝搬することが理解される。すなわち、 $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$ である。

(4) 電界ベクトルについて $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y, z) \exp(-i\omega t)$ と書かれるならば、(16)に代入することにより

$\exp(-i\omega t) \nabla^2 \mathbf{E}_0 = -\frac{\omega^2}{c^2} \exp(-i\omega t) \mathbf{E}_0$ すなわち $\nabla^2 \mathbf{E}_0 = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_0$ を得る。 $\omega/c = k$ と波数 k を定義すると、 $\mathbf{E}_0$ の従う方程式は $\nabla^2 \mathbf{E}_0 + k^2 \mathbf{E}_0 = 0$ となる。

(5) 前問(4)の解である微分方程式 $\nabla^2 \mathbf{E}_0 + k^2 \mathbf{E}_0 = 0$ は、Helmholtz の方程式と言われる。