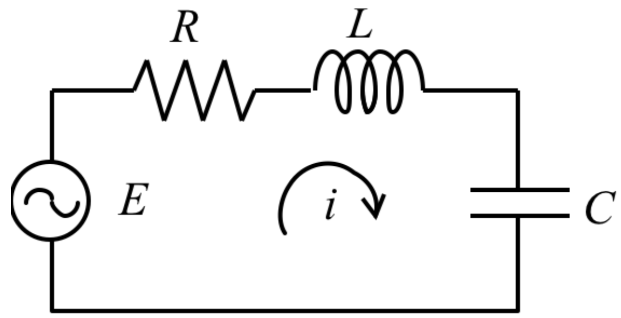
回路解析～(LCR回路)

回路解析～(LCR回路)

目標

- LCR回路(コンデンサの放電回路，コンデンサの充電回路)の過渡解析が解ける。
- キルヒホッフの電流･電圧法則を適用して、LCR回路の電流･電圧を定式化して定係数2階線形微分方程式を導ける。
- さらに、外部電源が非斉次項に対応することが理解できる。

1. LCR直列接続回路～キルヒホッフの電圧法則



- 右図の直列閉回路において、キルヒホッフの電圧法則を適用
- 回路素子ごとの電圧は
  - インダクタ: $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
  - 抵抗: Ri
  - コンデンサ: $\dfrac{1}{C}\int^{t} i\,\mathrm{d}t$
  - これらの総和が、電源電圧 $E = E_0 \cos \omega t$ に等しいと考えることにする。

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{1}{C}\int^{t} i\,\mathrm{d}t = E_0 \cos\omega t \qquad (1)$$

LCR直列　つづき

$Q=\int^t i\,\mathrm{d}t$ であるから、(1)式に代入すると

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{Q}{C}=E_0\cos\omega t \qquad (2)$$

初期条件は　$Q(0)=\int^{t=0} i\,\mathrm{d}t=Q_0$

$$\left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=i(0)=i_0$$

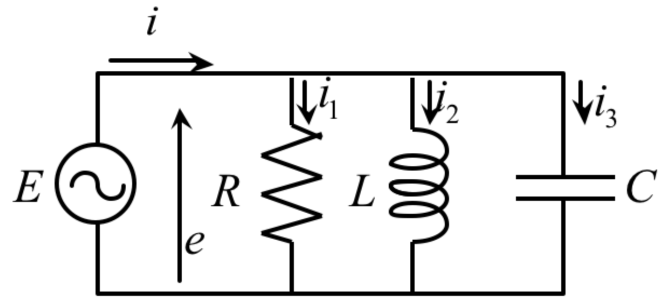
(1)を時間微分すると $L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{i}{C}=-\omega E_0\sin\omega t \qquad (3)$

こちらの初期条件は　$i(0)=i_0,\ \left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=i_0'$

– なお、(1) より、

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{L}\left(E_0\cos\omega t-Ri-\frac{1}{C}\int^t i\,\mathrm{d}t\right) \qquad (4)$$

2. LCR並列接続回路～キルヒホッフの電流法則



- 右図の並列閉回路において、キルヒホッフの電流法則を適用
- 回路素子に流れる電流は
  - インダクタ:　$\frac{1}{L}\int^t e\,\mathrm{d}t$
  - 抵抗:　e/R
  - コンデンサ:　$C\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$
  - これらの総和が、電流源によって与えられる電流 $I = I_0 \cos \omega t$ に等しいと考える。

$$C\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R}e + \frac{1}{L}\int^t e\,\mathrm{d}t = I_0 \cos \omega t \qquad (5)$$

LCR並列　つづき

$U=\int^{t} e\,\mathrm{d}t$ とおく。(5)式に代入すると

$$C\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+\frac{U}{L}=I_0\cos\omega t \tag{6}$$

初期条件は

$$U(0)=\int^{t=0} e\,\mathrm{d}t=U_0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=e_0$$

(6)を時間微分すると

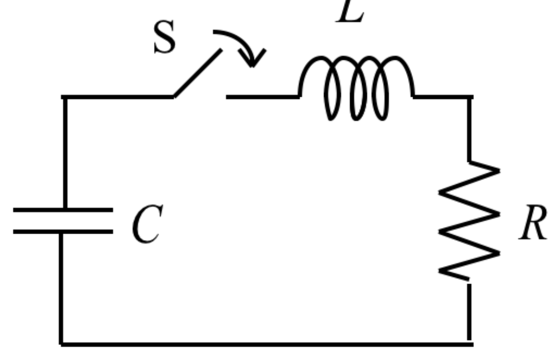
$$C\frac{\mathrm{d}^2e}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+\frac{e}{L}=-\omega I_0\sin\omega t \tag{7}$$

こちらの初期条件は $e(0)=e_0$, $\left.\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=e_0'$

– 式(2), (3), (6), (7)の本質は同一

3. コンデンサ放電回路

- コンデンサはスイッチを閉じる前に電圧V_0に充電されている（初期電荷 $Q_0 = CV_0$）
- (3)式より $$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{CL} = 0$$



  – この特性方程式は $$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{CL} = 0$$
  – これを解くと
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{ -\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{CL}} \right\} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL}}$$
  – 根の実部は必ず負。
    - 最終的にかならず減衰する。
    - 無限大に発散することはあり得ない

(1) 過制動

- ルート内＝判別式Dの符号に応じて３つに分類。 $$DL^2 = R^2 - \frac{4L}{C}$$

1. $D > 0$ $(R^2 > 4L/C)$のとき（異なる2実根）、過制動

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL}} = -\frac{1}{\tau} \pm \omega$$ とおく。この時

$$i(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} = c_1 \mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{\tau}+\omega\right)t} + c_2 \mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{\tau}-\omega\right)t}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left(c_1 \mathrm{e}^{\omega t} + c_2 \mathrm{e}^{-\omega t}\right)$$

(1)過制動　　つづき

- この時の初期条件は $i(0)=\mathrm{e}^0\left(c_1\mathrm{e}^0+c_2\mathrm{e}^0\right)=0$

  よって$c_1=-c_2$. さらに、これより

$$i(t)=c_1\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left(\mathrm{e}^{\omega t}-\mathrm{e}^{-\omega t}\right)=2c_1\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\frac{\mathrm{e}^{\omega t}-\mathrm{e}^{-\omega t}}{2}=2c_1\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\sinh\omega t$$

  ここで、$\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=2c_1\left(-\dfrac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\sinh\omega t+\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\omega\cosh\omega t\right)$

  $t=0$ での値を

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri+\frac{1}{C}\int_t^0 i\,\mathrm{d}t=0$$

  から考えてみる。

(1)過制動　さらにつづき

- コンデンサの初期電圧はV_0であるから

$$\left.\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 2c_1\omega = \frac{1}{L}\left[-Ri - \frac{1}{C}\int^t i\,\mathrm{d}t\right]_{t=0}$$

$$= \frac{1}{L}\left(Ri(0) + \frac{1}{C}\int_t^0 i\,\mathrm{d}t\right) = \frac{V_0}{L}$$

これより、$c_1 = \dfrac{V_0}{2\omega L}$ となることがわかる。よって

$$i = \frac{V_0}{\omega L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\sinh\omega t$$ が求め得る特殊解となる。

ただし、$\omega = \sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 - \dfrac{1}{CL}}$ である。

(2) 臨界制動

2. $D = 0$ $(R^2 = 4L/C)$のとき、重根、臨界制動

$$\lambda = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{\tau}$$

このとき

$$i(t) = c_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t} + c_2 t \mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t}\left(c_1 + c_2 t\right),$$

一方初期条件は $i(0) = \mathrm{e}^0\left(c_1 + 0\right) = 0$ より $c_1 = 0$

よって

$$i(t) = c_2 t \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

次に、電流の時間微分の初期条件として、過減衰の時と同様に考えて

(2) 臨界制動　　　つづき

$$\left.\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = c_2 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + c_2 t\left(-\frac{1}{\tau}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= c_2 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left[1-\frac{t}{\tau}\right]_{t=0} = c_2 = \frac{V_0}{L}$$

以上より、

$$i = \frac{V_0}{L} t\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}$$

と特殊解が求まった。

(3) 減衰振動

3. $D < 0$ $(R^2 < 4L/C)$のとき、共役複素解、減衰振動

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \alpha \pm j\omega$$ このとき

$$i = \mathrm{e}^{\alpha x}(c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x)$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\left(c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x\right)$$

電流の初期条件から　$i(0) = \mathrm{e}^0\left(c_1 + c_2 \cdot 0\right) = 0$

これから $c_1 = 0.$ よって

$$i(t) = c_2 \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} \sin\omega t$$ となる。

(3) 減衰振動　　　　つづき

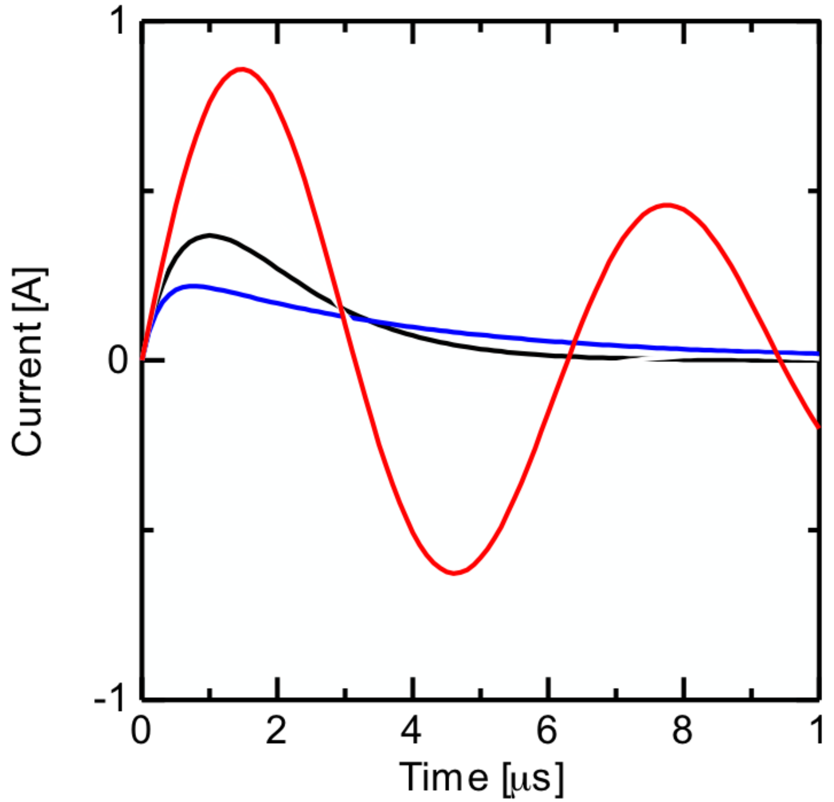
$$\left.\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\left[-c_2\frac{R}{2L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega t+c_2\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\omega\cos\omega t\right]_{t=0}$$

$=c_2\omega=\dfrac{V_0}{L}$ これより $c_2=\dfrac{V_0}{\omega L}$

以上より $i=\dfrac{V_0}{\omega L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega t$

ただし　$\omega=\sqrt{\dfrac{1}{CL}-\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}$

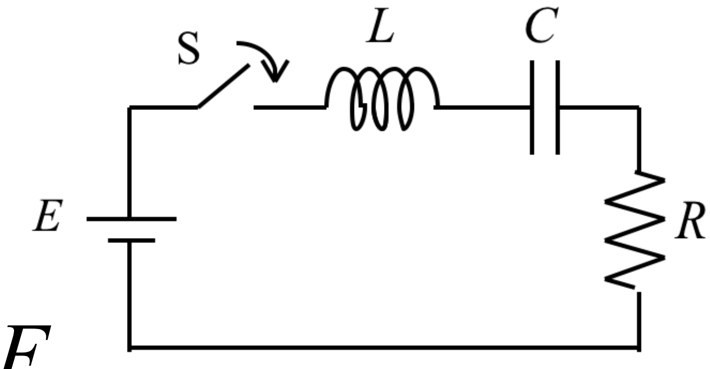
過制動、臨界減衰、減衰振動の電流波形の例



電流波形:

青:過制動, 黒:臨界制動, 赤:減衰振動

4. コンデンサ充電回路



キルヒホッフ電圧法則から

$$\frac{q}{C} + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E$$

- 初期条件として、初期電荷 $q(0) = 0$, 初期電流 $i(0) = 0$.
  - ここで $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ であることに注意すると, 上の式は

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{CL} = \frac{E}{L}$$

と変形できる。この特殊解q_sは、定常を仮定すると容易に $q_s = CE$と求まる。

4. コンデンサ充電回路　つづき

- 対応する斉次方程式は $$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{CL} = 0$$
  - 特性方程式は $$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{CL} = 0$$
  - この解は $$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{CL}}\right\} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL}}$$
  - よって根の実数部分は常に負。ルート内Dの符号に応じて3つに分類。 $$DL^2 = R^2 - \frac{4L}{C}$$

(1) 過制動

1. $D > 0 \ \ (R^2 > 4L/C)$のとき（異なる2実根）、

過制動

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL}} = -\frac{1}{\tau} \pm \omega$$ とおく。この時

$$q(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left(c_1 \mathrm{e}^{\omega t} + c_2 \mathrm{e}^{-\omega t}\right) + CE$$ より

$$q(0) = c_1 + c_2 + CE = 0$$ ，一方

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = c_1\left(-\frac{1}{\tau} + \omega\right)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{\tau}+\omega\right)t} + c_2\left(-\frac{1}{\tau} - \omega\right)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{\tau}-\omega\right)t}$$

(1) 過制動　　つづき

- よって　$i(0) = c_1\left(-\frac{1}{\tau} + \omega\right) + c_2\left(-\frac{1}{\tau} - \omega\right) = 0$

- これで任意定数が決定できる。

$$c_1 = -\frac{CE}{2}\left(1 + \frac{1}{\omega\tau}\right), \quad c_2 = -\frac{CE}{2}\left(1 - \frac{1}{\omega\tau}\right)$$

- 以上から、以下のように充電波形が求まった。

$$q(t) = CE\left[1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left\{\left(1 + \frac{1}{\omega\tau}\right)\mathrm{e}^{\omega t} + \left(1 - \frac{1}{\omega\tau}\right)\mathrm{e}^{-\omega t}\right\}\right]$$

(2) 臨界制動

2. $D = 0 \;\; (R^2 = 4L/C)$のとき（重根）、

臨界制動

$$\lambda = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{\tau}$$ とおく。この時

$$q(t) = c_1 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + c_2 t \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + CE = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \left(c_1 + c_2 t \right) + CE$$

となる。

- 電荷初期条件は $q(0) = c_1 + CE = 0$
- これから $c_1 = -CE$

(2) 臨界制動　つづき

- また、 $i(t)=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left\{-\dfrac{1}{\tau}\left(c_1+c_2t\right)+c_2\right\}$

- より、電流初期条件から $i(0)=-\dfrac{c_1}{\tau}+c_2=0$
  - よって $c_2=-\dfrac{CE}{\tau}$

- 以上まとめると

$$q(t)=CE\left\{1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left(1+\frac{t}{\tau}\right)\right\}$$

(3) 減衰振動

3. $D<0$ $(R^2<4L/C)$のとき、共役複素解、減衰振動

$$\lambda_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm j\sqrt{\frac{1}{CL}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}=-\frac{1}{\boldsymbol{\tau}}\pm j\omega$$ このとき

$$q(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}(c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t)+CE$$

一方、電荷の初期条件から $q(0)=c_1+CE=0$

これから $c_1=-CE$

一方、電流は

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left\{\frac{1}{\boldsymbol{\tau}}(c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t)+\omega(c_1\sin\omega t-c_2\cos\omega t)\right\}$$

(3) 減衰振動　　つづき

- これに電流初期条件を適用すると

$$i(0) = -\frac{c_1}{\tau} + \omega c_2 = 0$$

  – これから任意定数を決定できて　$c_2 = -\dfrac{CE}{\omega\tau}$

- 以上まとめると

$$q(t) = CE\left\{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}(\cos\omega t + \frac{1}{\omega\tau}\sin\omega t)\right\}$$

III 微分方程式の応用

12. 級数展開法

目標

- 級数展開法が理解できる
- 正則点、確定特異点の違いが理解できる
- 正則点での級数展開法で解ける
- 確定特異点での級数展開法で解ける

12.1　級数展開法とは

- 微分方程式の解yが級数解、即ち次のようなxのべき級数で展開されると仮定する。

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \qquad (12.1)$$

Power series

  - ここで、A_nはxのn乗の項の係数である。
- 式(12.1)を項別に微分して導関数を求める。たとえば、1次と2次の導関数は、それぞれ

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_{n+1} x^n \qquad (12.2)$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) A_{n+2} x^n \qquad (12.3)$$

となる。次に、これらを微分方程式に代入し、微分方程式の両辺で同じべき乗の項の係数を比較することにより、べき級数の係数A_nに関する漸化式を導出し、それを解いてA_nを求める。

Recurrent formula

- ただし、この手法は必ずしもすべての微分方程式に適用できるとは限らないことに注意する。

例題12.1　$y' + y = 0$　(12.4)

を級数展開法で解く。

(解)　式(12.1), 式(12.2) を微分方程式(12.4)へ代入すると、

$$y' + y = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)A_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}A_n x^n = 0$$

x^nの項の係数が恒等的に0となることから、次の漸化式の成立が必要十分。

$$(n+1)A_{n+1} + A_n = 0$$

ここで、$n+1$をnと置き換えると

$$nA_n + A_{n-1} = 0$$

例題12.1　　つづき

よって、$A_n = -\dfrac{1}{n}A_{n-1}$ となる。この漸化式を解く。

$$A_n = -\frac{1}{n}A_{n-1} = \left(-1\right)^2 \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}A_{n-2} = \cdots = \left(-1\right)^n \frac{1}{n!}A_0$$

となる。これを式(12.1)へ代入すると、微分方程式(12.4)の一般解は

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_0 \frac{\left(-1\right)^n}{n!} x^n = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-x\right)^n = A_0 \exp\left(-x\right)$$

となる。式(12.4)は1階微分方程式であるので、任意定数A_0を1つ含む。

例題12.1　　　さらにつづき

- この結果は、微分方程式(12.4)を変数分離法で求めた一般解 $y = A_0 \exp(-x)$ をべき級数展開した解と一致する。

級数展開法が適用できない例

例題12.2　　$xy' - y = x$　　(12.5)

を級数展開法を適用する（参照：例題3.1, 例題5.5）

(解)　式(12.1), 式(12.2) を微分方程式(12.5)へ代入すると、

$$x\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)A_{n+1}x^{n} - \sum_{n=0}^{\infty}A_{n}x^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)A_{n+1}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}A_{n}x^{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}nA_{n}x^{n} - \sum_{n=0}^{\infty}A_{n}x^{n} = x$$

- ここでx^1の項の係数について着目すると、左辺は恒等的にゼロ、右辺は1で、矛盾が生じ、解は存在しない。
- 微分方程式(12.5)の一般解は例題3.1, 例題5.5で示したように、$y = x \log|x| + Cx$であり、$\log x$は$x = 0$においてxのべき級数で展開できないことに対応している。

12.2　正則点での級数展開法

- 2階線形方程式 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$において、$p(x), q(x)$ が多項式で表されるとき、点 $x = 0$ はこの微分方程式の正則点（または通常点）という。

  Polynomial

  Regular point

- このとき、微分方程式の一般解は以下のように2つの多項式の1次結合で表される。

$$y = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n + C_2 \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$$

  – ここに、C_1とC_2は任意定数である。

例題12.3 $y'' - xy' - y = 0$ (12.6)

を級数展開法で解く。

(解) 式(12.1) – (12.3) を微分方程式(12.6)へ代入し、各項のxの次数を揃えるように変形し、展開係数の漸化式を求める。

$$y'' - xy' - y = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)A_{n+2}x^n - x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)A_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}A_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)A_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)A_{n+1}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}A_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)A_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}nA_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}A_n x^n = 0$$

例題12.3　つづき

- x_0 の係数が恒等的にゼロとなることから、

  $$2A_2 - A_0 = 0$$ となる。

- 次に、x^nの係数(ただし、$n \geq 1$)が恒等的にゼロとなることから、以下の漸化式が成立つ。

  $$(n+2)(n+1)A_{n+2} - nA_n - A_n$$
  $$= (n+1)\{(n+2)A_{n+2} - A_n\} = 0$$

- 従って、$n = 0$ の時も含めて、以下の漸化式が成立つ。

  $$(n+2)A_{n+2} - A_n = 0$$

例題12.3　さらにつづき

- ここで、$n+2$をnと置き換えると、上式は $nA_n - A_{n-2} = 0$ となり、$n \geq 2$において
$$A_n = \frac{1}{n} A_{n-2}$$
となる。
- $n = 2m\ (m \geq 1)$ のとき

$$A_n = A_{2m} = \frac{1}{2m} A_{2m-2} = \frac{1}{2m \cdot 2(m-1)} A_{2m-4} = \cdots = \frac{1}{2^m m!} A_0$$

あるいは $= \dfrac{1}{(2m)!!} A_0$

例題12.3　さらにつづき

- $n = 2m + 1\ (m \geq 1)$ のとき

$$A_n = A_{2m+1} = \frac{1}{2m+1} A_{2m-1} = \frac{1}{(2m+1)(2m-1)} A_{2m-3}$$

$$= \cdots = \frac{1}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3} A_1 = \frac{1}{(2m+1)!!} A_1$$

よって一般解は

$$y = A_0 + A_1 x + A_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m m!} x^{2m} + A_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!!} x^{2m+1}$$

$$= A_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m m!} x^{2m} + A_1 x + A_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!!} x^{2m+1}$$

例題12.3　さらにつづき

- あるいは

$$= A_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!!} x^{2m} + A_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!!} x^{2m+1}$$

となる。式(12.6)は2階微分方程式であるので、2つの任意定数A_0, A_1を含む。

12.3　確定特異点での級数展開法

- 2階線形方程式 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$において、
$$p(x) = \frac{1}{x}\sum_{m=0}^{\infty} P_m x^m, \qquad q(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{m=0}^{\infty} Q_m x^m$$
- のように表されるとき、点 $x = 0$ はこの微分方程式の**確定特異点**という。 regular singular point
- このとき、微分方程式の一般解は以下の形で表される。
$$y = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \qquad (12.7)$$

決定方程式

- λは以下の手順で決定する。
  – 微分方程式の両辺にx^2をかけた式

$$x^2 y'' + \left\{xp\left(x\right)\right\}\left(xy'\right) + \left\{x^2 q\left(x\right)\right\} y = 0$$

に、$xp\left(x\right) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m x^m$, $x^2 q\left(x\right) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m x^m$ と式(12.7)を代入すると

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda+n\right)\left(\lambda+n-1\right)A_n x^{\lambda+n} + \left(\sum_{m=0}^{\infty} P_m x^m\right)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda+n\right)A_n x^{\lambda+n}\right\} + \left(\sum_{m=0}^{\infty} Q_m x^m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{\lambda+n}\right) = 0$$

が得られる。

決定方程式　　つづき

– xの最小次数のべき x^λ の係数をゼロとおくことから

$$\lambda(\lambda - 1) + P_0\lambda + Q_0 = 0$$

が得られる。

– 上記を決定方程式という。（指数を定める式）

– このとき、P_0, Q_0は、

$$P_0 = [xp(x)]_{x=0}, \qquad Q_0 = [x^2 q(x)]_{x=0}$$

から求められる。

– 決定方程式の2つの解を λ_1, λ_2 とする。ただし、ここでは解は実数で $\lambda_1 \geq \lambda_2$ と仮定する。

決定方程式　　さらにつづき

– このとき、微分方程式の λ_1 に対する基本解y_1は

$$y_1 = x^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

と表せる。一方、y_1と1次独立な基本解y_2は、$\lambda_1 - \lambda_2$ の値により形が異なる。(導出詳細略：**Frobeniusの方法**として有名)

表12.1　1次独立な基本解y_2の形　(Cは定数)

$\lambda_1 - \lambda_2 \neq$ 整数	$y_2 = x^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y_2 = Cy_1 \log\lvert x\rvert + x^{\lambda_2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n x^n$
$\lambda_1 - \lambda_2 =$ 正の整数	$y_2 = Cy_1 \log\lvert x\rvert + x^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$

まとめ：本日の確認事項

- LCR回路(コンデンサの放電回路，コンデンサの充電回路)の過渡解析が解ける。
- キルヒホッフの電流・電圧法則を適用して、LCR回路の電流・電圧を定式化して定係数2階線形微分方程式を導ける。
- さらに、外部電源が非斉次項に対応することが理解できる。
- 級数展開法が理解できる
- 正則点、確定特異点の違いが理解できる
- 正則点での級数展開法で解ける
- 確定特異点での級数展開法で解ける