電磁気学基礎 I-e(上妻)No.4

2018.12.10

【1】《電荷の連続分布》

(i) xy 平面上で原点を中心とする半径 b の円周上に電荷 q が一様に電荷が分布している．z 軸上の点 $\mathrm{P}(0,0,z)$ における電場を求めよ．

(ii) xy 平面上で原点を中心とする半径 a の円板上に面密度 σ で一様に電荷が分布している．z 軸上の点 $\mathrm{P}(0,0,z)$ における電場を求めよ．

(iii) (ii) の結果で $a \gg |z|$ および $a \ll |z|$ の両極限で電場は z の関数としてどのように振る舞うか．

(※) $a \ll |z|$ のとき，$|z| \to \infty$ として極限値ゼロを答えても全く答にならない．有限の大きさの電荷から無限に距離が離れればその影響はなくなる (つまり，電場がゼロに近づく) はほとんど自明である.「電場の距離依存性がどういう状況であるように見えるか」を問うている．$|z|$ 依存性の大事な部分を残すこと．

(iv) (iii) の結果は物理的にどのように解釈されるか，議論せよ．

【2】《電荷分布と電場》

よく知られているように，無限に広い平面上 (xy 平面とする) に一様な面密度 σ で電荷が分布しているとき，電場は

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\boldsymbol{k} \tag{1}$$

である．よく見てみると電場は $z=0$ で不連続に変化してしまっている．これは無限に薄い平面上に有限の面密度で電荷が分布していることが原因である．では，平面の厚さを $2d$ としてこの内部に電荷が分布しており，電場 $\boldsymbol{E} = E(z)\boldsymbol{k}$ の変化が滑らかで

$$\frac{E(z)}{E_0} = \begin{cases} -1 & (z < -d) \\ (z/d)^2 + 2(z/d) & (-d < z < 0) \\ -(z/d)^2 + 2(z/d) & (0 < z < d) \\ 1 & (d < z) \end{cases} \tag{2}$$

となるためにはどういう電荷分布であればよいかを調べてみよう．E_0 は定数である．

(i) $E(z)$ のグラフを描け．

(ii) (i) の結果から，電荷分布は xy 平面に関して対称であると考えられる．電荷の体積密度を $\rho(z)$ と書くことにしよう (x, y にはよらない)．Gauss の法則を用いて $E(z)$ を $\rho(z)$ を用いて表せ．

(iii) $\rho(z)$ はどのようになるか，具体的関数形を記せ．

【3】《Gauss の法則の実用性》

Gauss の法則を使うと非常に簡単に電場が求められる例題を勉強してその威力に感動した A 君，円板上に電荷が分布した場合などにも電場が Gauss の法則で求められないかと思い，いろいろなテキストや演習書を調べてみたり，インターネットで探したりしてみたが，見つからない．A 君は「こういう場合は Gauss の法則は成り立たないのかな？」と思っているようである．A 君に明快な解説をしてあげてください．